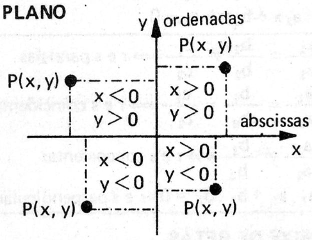
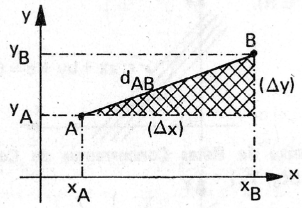
Geometria Analítica I

1. COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO



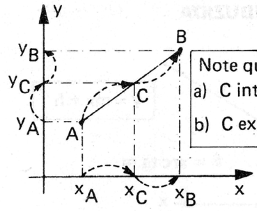
2. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

$$\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



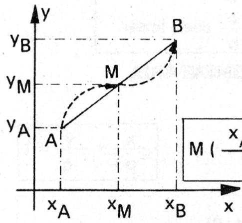
3. RAZÃO DE SECÇÃO

$$r = \frac{AC}{CB}\begin{cases} \text{em } \vec{O}x : r = \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \\ \text{em } \vec{O}y : r = \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} \end{cases}$$



Note que:
a) C interno a AB $\Longleftrightarrow r > 0$
b) C externo a AB $\Longleftrightarrow r < 0$

Ponto Médio:



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

4. ALINHAMENTO DE 3 PONTOS

Sejam:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \\ C(x_C, y_C) \end{array}\right\} \text{ e } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$D = 0 \Longleftrightarrow$ A, B, C são colineares
$D \neq 0 \Longleftrightarrow$ A, B, C formam triângulo

5. ÁREA DO TRIÂNGULO

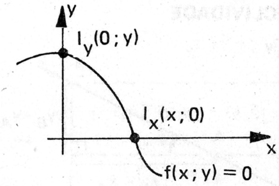
$$\boxed{\text{Área do triângulo} = \frac{1}{2} \cdot |D|}$$

6. INTERCEPTOS

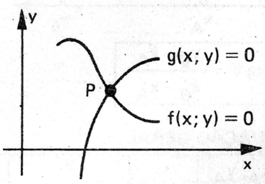
Obtenção de:

$I_x \rightarrow$ toma-se $y = 0$ em $y = f(x)$

$I_y \rightarrow$ toma-se $x = 0$ em $y = f(x)$



7. INTERSECÇÃO DE CURVAS



As coordenadas do ponto de intersecção são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0 \end{cases}$$

8. ESTUDO DA RETA

8.1. EQUAÇÃO DA RETA

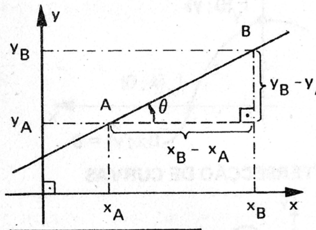
$\boxed{ax + by + c = 0}$ a e b não simultaneamente nulos.

$\boxed{a = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{c}{b} \Rightarrow y = K}$ Reta horizontal

$\boxed{b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{c}{a} \Rightarrow x = K}$ Reta vertical

$\boxed{c = 0 \Rightarrow ax + by = 0}$ Reta passa pela origem

8.2. DECLIVIDADE

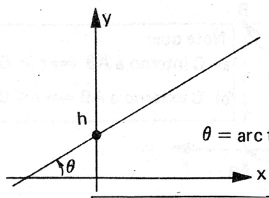


$$\boxed{m = tg\,\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

8.3. EQUAÇÃO GERAL

$$\left.\begin{matrix} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax + by + c = 0$$

8.4. EQUAÇÃO REDUZIDA



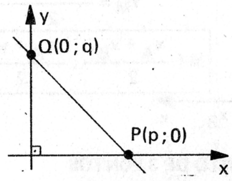
$\boxed{y = mx + h}$

$\theta = \text{arc tg } m$

$m = -\dfrac{a}{b}$ coef. angular

$h = -\dfrac{c}{b}$ coef. linear

8.5. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA



$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

8.6. POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS RETAS

- $r: y = m_1x + h_1$
  $s: y = m_2x + h_2$

$m_1 = m_2$ e $h_1 \neq h_2 \Longleftrightarrow$ r e s paralelas
$m_1 = m_2$ e $h_1 = h_2 \Longleftrightarrow$ r e s coincidentes
$m_1 \neq m_2 \Longleftrightarrow$ r e s concorrentes
$m_1 = -\dfrac{1}{m_2} \Longleftrightarrow$ r e s perpendiculares

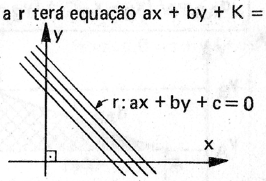
- $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$
  $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ r e s paralelas
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Longleftrightarrow$ r e s coincidentes
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Longleftrightarrow$ r e s concorrentes
$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 = 0 \Leftrightarrow$ r e s perpendiculares

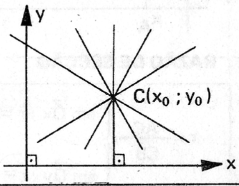
8.7. FEIXE DE RETAS

- **Feixe de Retas Paralelas**

$r: ax + by + c = 0$ então o feixe de retas paralelas a r terá equação $ax + by + K = 0$ $(K \in R)$.



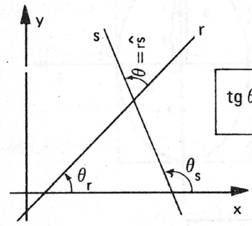
- **Feixe de Retas Concorrentes de Centro $C(X_0, Y_0)$**



$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0) \quad (m \in R) \quad \text{ou} \quad x = x_0}$

8.8. ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

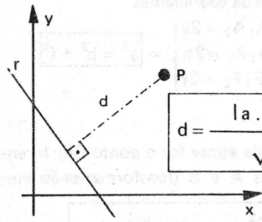
Conhecidos os coeficientes angulares m_r e m_s, temos:



$$\boxed{tg\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}}$$

8.9. DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

Dado o ponto: $P(x_P, y_P)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$, temos:

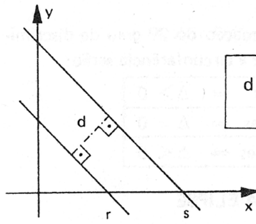


$$\boxed{d = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

8.10 DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS

Dadas as retas paralelas

$$\begin{cases} r: a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \\ s: a \cdot x + b \cdot y + c' = 0 \end{cases}$$, temos:



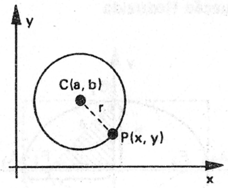
$$\boxed{d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

9. ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

9.1. EQUAÇÃO CARTESIANA (ou reduzida)

A equação da circunferência de centro **C(a, b)** e raio **r** é:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2} \quad (I)$$



Caso particular

Se o centro da circunferência for a **origem** do sistema cartesiano então **C(0, 0)** e a equação será:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

9.2. EQUAÇÃO GERAL (ou Normal)

Desenvolvendo-se (I), obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p = 0}$$

9.3. EQUAÇÃO DO 2º GRAU E A CIRCUNFERÊNCIA

A equação do segundo grau

$$x^2 + y^2 + k \cdot xy + mx + ny + p = 0$$

será a equação de uma circunferência de centro

C(a, b), com $a = -\dfrac{m}{2}$ e $b = -\dfrac{n}{2}$,

e raio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - p}$

se, e somente se:

a) Os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais e não nulos. Podemos sempre supor que sejam ambos iguais a 1.

b) "Não existir" o termo em xy, ou seja $k = 0$.

c) $r^2 = a^2 + b^2 - p > 0$.

Observação:

a) Se $a^2 + b^2 - p = 0$ a equação representa apenas o ponto C(a, b).

b) Se $a^2 + b^2 - p < 0$ o conjunto verdade da equação é o conjunto vazio.

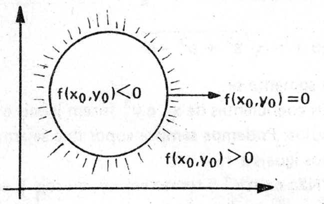
9.4. POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Sejam $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ a equação de uma circunferência e $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer. Seja, ainda,

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 + m \cdot x_0 + n \cdot y_0 + p$$

A posição do ponto P em relação à circunferência é determinada pelo valor de $f(x_0, y_0)$. Assim:

$f(x_0, y_0) = 0 \iff$ **P pertence à circunferência**
$f(x_0, y_0) > 0 \iff$ **P externo à circunferência**
$f(x_0, y_0) < 0 \iff$ **P interno à circunferência**



9.5. POSIÇÃO RELATIVA DE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \end{cases}$$

recai-se numa equação do 2º grau de discriminante Δ. A reta e a circunferência serão:

secantes	$\iff \Delta > 0$
tangentes	$\iff \Delta = 0$
exteriores	$\iff \Delta < 0$

10. ESTUDO DA ELIPSE

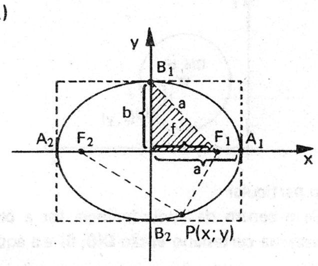
- **Definição**

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida $2a$, denomina-se ELIPSE ao L.G. dos pontos do plano tais que:

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

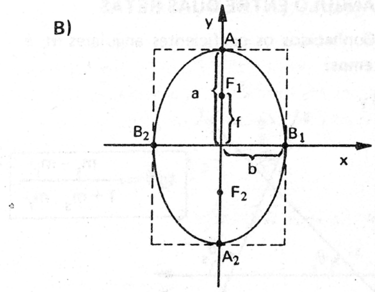
- **Equação Reduzida**

A)



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

B)



$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

- **Relação entre os coeficientes**

Eixo maior: $A_1A_2 = 2a$
Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$
Distância focal: $F_1F_2 = 2f$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + f^2}$$

Observação:

Se o centro da elipse for o ponto $C(g; h)$ então as equações A e B transformar-se-ão em:

$$\frac{(x-g)^2}{a^2} + \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-g)^2}{b^2} + \frac{(y-h)^2}{a^2} = 1$$

11. ESTUDO DA HIPÉRBOLE

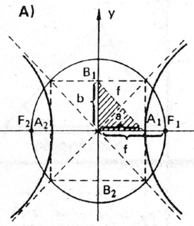
- **Definição**

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos) e um segmento de medida 2a, denomina-se HIPÉRBOLE ao L.G. dos pontos do plano tais que:

$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

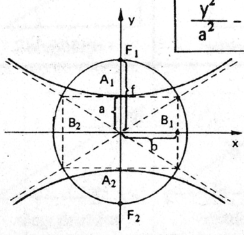
- **Equação Reduzida**

A)



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

B)



$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

- **Relação entre os coeficientes**

Eixo transverso: $A_1A_2 = 2a$
Eixo conjugado: $B_1B_2 = 2b$
Distância focal: $F_1F_2 = 2f$

$$\Rightarrow \boxed{f^2 = a^2 + b^2}$$

Observações:

1) As equações das assíntotas da hipérbole com centro C(0; 0) são:

$y = \pm \dfrac{b}{a} \cdot x$	item A
$y = \pm \dfrac{a}{b} \cdot x$	item B

2) Se o centro da hipérbole for o ponto C(g; h) as equações A e B transformar-se-ão em:

$$\frac{(x-g)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-g)^2}{b^2} = 1$$

12. ESTUDO DA PARÁBOLA

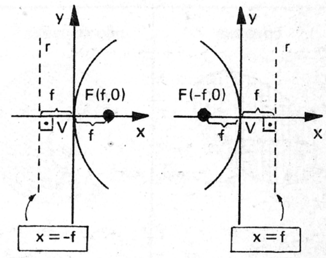
- **Definição**

Dado um ponto F (foco) e uma reta r (diretriz), denomina-se PARÁBOLA ao L.G. dos pontos do plano eqüidistantes de F e de r.

$$\boxed{PF = Pr}$$

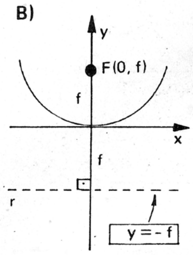
- **Equação Reduzida**

A)



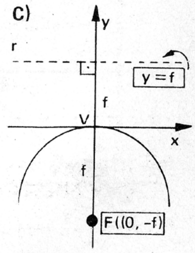
$$\boxed{y^2 = 4.f.x} \qquad \boxed{y^2 = -4.f.x}$$

B)



$$\boxed{x^2 = 4.f.y}$$

C)



$$\boxed{x^2 = -4.f.y}$$