

Trigonometria I

1. MEDIDAS DE ARCOS E ÂNGULOS

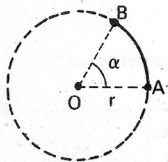
Sistema Grau

Grau ($^{\circ}$) = $\frac{1}{90}$ do ângulo reto

Minuto ($'$) = $\frac{1}{60}$ do grau

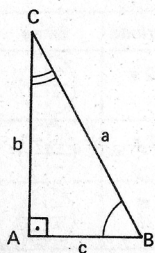
Segundo ($''$) = $\frac{1}{60}$ do minuto

Sistema Radiano



$$\alpha = \frac{\text{comp}(\widehat{AB})}{r}$$

2. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$\begin{aligned} \text{seno} &= \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipot.}} \\ \text{co-seno} &= \frac{\text{cat. adjac.}}{\text{hipot.}} \\ \text{tangente} &= \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjac.}} \end{aligned}$$

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \text{cos } C$$

$$\text{cos } B = \frac{c}{a} = \text{sen } C$$

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{cotg } C$$

$$\text{cotg } B = \frac{c}{b} = \text{tg } C$$

$$\text{sec } B = \frac{a}{c} = \text{cossec } C$$

$$\text{cossec } B = \frac{a}{b} = \text{sec } C$$

Ângulos complementares têm co-funções iguais.

3. VALORES NOTÁVEIS

| x | sen x | cos x | tg x | |
|--------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

4. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS E AUXILIARES

F.I.) $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$

F.II.) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$

F.III.) $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$

F.IV.) $\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x}$

F.V.) $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

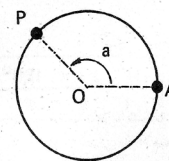
A.I.) $\text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$

A.II.) $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$

5. ARCO TRIGONOMÉTRICO

\widehat{AP} é o conjunto de todos os arcos de origem A e extremidade P.

Conjunto das determinações:



$$a + n \cdot 2\pi$$

ou

$$a + n \cdot 360^{\circ}$$

($n \in \mathbb{Z}$)

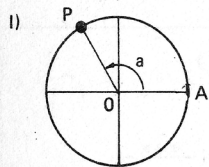
Ref.: 221226, Cursinho Objetivo

1 de 4

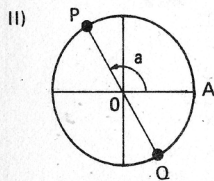


Trigonometria II

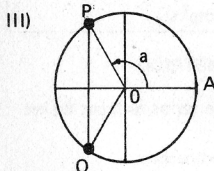
Casos Notáveis:



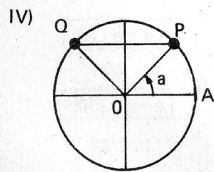
$$\begin{matrix} a + n \cdot 360^\circ \\ a + n \cdot 2\pi \end{matrix}$$



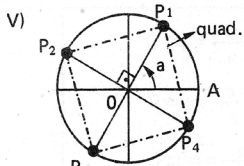
$$\begin{matrix} a + n \cdot 180^\circ \\ a + n \cdot \pi \end{matrix}$$



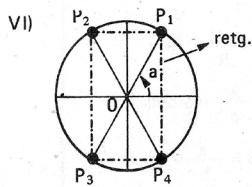
$$\begin{matrix} \pm a + n \cdot 360^\circ \\ \pm a + n \cdot 2\pi \end{matrix}$$



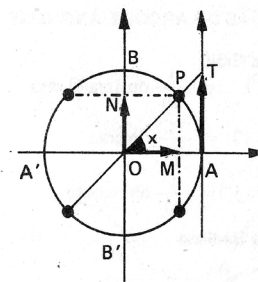
$$\begin{matrix} (-1)^n \cdot a + n \cdot 180^\circ \\ (-1)^n \cdot a + n \cdot \pi \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} a + n \cdot 90^\circ \\ a + n \cdot \pi/2 \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} \pm a + n \cdot 180^\circ \\ \pm a + n \cdot \pi \end{matrix}$$



Do ciclo trigonométrico definimos:

$$\begin{matrix} \text{sen } x = \text{ON} \\ \text{cos } x = \text{OM} \\ \text{tg } x = \text{AT} \end{matrix}$$

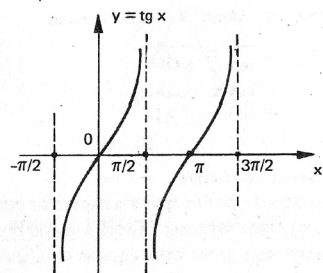
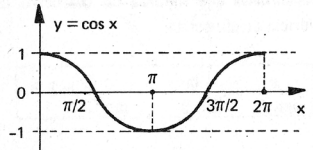
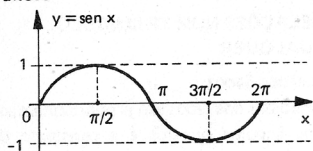
6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

| Função | Domínio | Imagem | I | II | III | IV | Par ou Ímpar | Período | Sinais |
|--------|-------------------------------|--------------|---|----|-----|----|--|---------|--|
| sen x | \mathbb{R} | $[-1; 1]$ | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ | Ímpar $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$ | 2π | $\begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix}$ |
| cos x | \mathbb{R} | $[-1; 1]$ | ↘ | ↘ | ↗ | ↗ | Par $\text{cos } x = \text{cos } (-x)$ | 2π | $\begin{matrix} - & + \\ - & + \end{matrix}$ |
| tg x | $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ | \mathbb{R} | ↗ | ↗ | ↗ | ↗ | Ímpar $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$ | π | $\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}$ |



Trigonometria III

Gráficos



7. VARIACÃO DO PERÍODO DE UMA FUNÇÃO

- a) Seja $y = f(x)$ de período p
e Y de período P
- I) $Y = K + f(x)$ então $P = p$
- II) $Y = K \cdot f(x)$ então $P = p$

- III) $Y = f(x + K)$ então $P = p$
- IV) $Y = f(K \cdot x)$ então $P = \frac{p}{|K|}$

b) Graficamente ocorrem as seguintes mudanças:

I) O gráfico da função **sobe** K se $K > 0$ ou **desce** K se $K < 0$.

II) O gráfico da função **deforma-se** na vertical (**abre** ou **fecha**). Se $K < 0$ o gráfico também gira em 180° em torno do eixo x .

III) O gráfico **desloca-se** K , para a **esquerda** se $K > 0$ ou para a **direita** se $K < 0$.

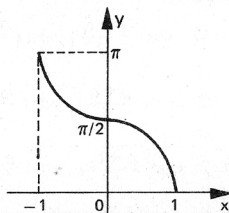
IV) O gráfico **deforma-se** na horizontal (**abre** ou **fecha**), devido a mudança do período.

8. FUNÇÕES INVERSAS

a) A função inversa da função

$f : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ t.q. $f(x) = \cos x$ é:

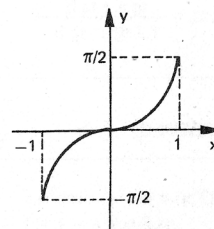
$f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$ t.q. $f^{-1}(x) = \arccos x$



b) A função inversa da função

$f : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$ t.q. $f(x) = \sin x$ é

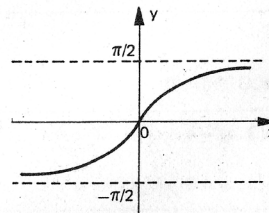
$f^{-1} : [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ t.q. $f^{-1}(x) = \arcsin x$



c) A função inversa da função

$f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = \tan x$ é

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ t.q. $f^{-1}(x) = \arctan x$



Ref.: 221226, Cursinho Objetivo

3 de 4



Trigonometria IV

9. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE ARCOS

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

10. ARCO DUPLA

$$\begin{aligned} \cos(2 \cdot a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = \\ &= 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

$$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(2 \cdot a) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

11. ARCO TRIPLO

$$\cos(3 \cdot a) = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\sin(3 \cdot a) = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a$$

12. FÓRMULAS DE REVERSÃO (WERNER)

A partir de:

$$\text{I) } \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{II) } \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{III) } \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\text{IV) } \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

obtem-se

$$\text{I} + \text{II: } \cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$$

$$\text{I} - \text{II: } \cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \cdot \sin a \cdot \sin b$$

$$\text{III} + \text{IV: } \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$$

$$\text{III} - \text{IV: } \sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cdot \cos a \cdot \sin b$$

13. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

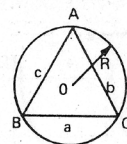
$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

14. RELAÇÕES NUM TRIÂNGULO QUALQUER

I. Lei dos Senos

As medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



II. Lei dos Cossenos

O quadrado de um lado é a soma dos quadrados dos lados restantes, menos o duplo produto desses dois lados pelo co-seno do ângulo que eles formam.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}$$

