Álgebra – Derivadas – I

1. DEFINIÇÃO

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função de variável real. f é derivável no ponto $a \in I$, se e somente se, existe um número real d tal que:

$$d = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

O número real d é a derivada da função f no ponto a e é indicado por $f'(a)$.

Se fizermos $x - a = h$ então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. FUNÇÃO DERIVADA

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I. Chama-se função derivada da Função f à função $f': I \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

3. TABELA DE DERIVADAS

a) Operações com funções:

Sejam $u = f(x)$ e $v = g(x)$ duas funções e k um número real.

$y = k \cdot u \Rightarrow y' = k \cdot u'$

$y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$

$y = u - v \Rightarrow y' = u' - v'$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = v \cdot u' + v' \cdot u$

$y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$

b) Função Constante

$y = k \Rightarrow y' = 0$

c) Função Identidade

$y = x \Rightarrow y' = 1$

d) Função Potência

$y = x^k \Rightarrow y' = k \cdot x^{k-1}$

e) Função Exponencial

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

f) Função Logarítmica

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

$y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

g) Funções Trigonométricas

$y = \text{sen } x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\text{sen } x$

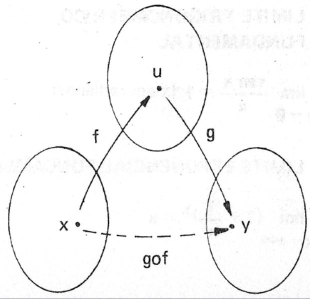
$y = \text{tg } x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

$y = \text{cotg } x \Rightarrow y' = -\text{cossec}^2 x$

$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \text{tg } x$

$y = \text{cossec } x \Rightarrow y' = -\text{cossec } x \text{ cotg } x$

h) Função Composta

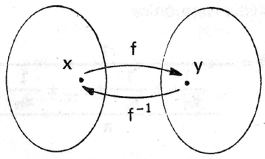


$$u = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$y = g(u) \Rightarrow \frac{dy}{du}$$

$$\therefore\ y = g[\,f(x)\,] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

i) Função Inversa



$$\underbrace{y = f(x)}_{\frac{dy}{dx}} \Leftrightarrow \underbrace{x = f^{-1}(y)}_{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

4. APLICAÇÕES DE DERIVADAS

a) Ponto crítico de f.

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Um ponto $a \in I$ é chamado **ponto crítico** de f se, e somente se, $f'(a) = 0$.

Se $a \in I$ é um ponto crítico de f então:

$$\begin{cases} \text{ou a é minimante} \\ \text{ou a é maximante} \\ \text{ou a é abscissa de ponto de inflexão horizontal.} \end{cases}$$

b) Função Monotônica (Monótona)

Se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável em $J \subset I$, então:

– f é **estritamente crescente** em J se, e somente se, $f'(x) > 0$ para todo $x \in J$.

– f é **estritamente decrescente** em J se, e somente se, $f'(x) < 0$ para todo $x \in J$.

c) Pontos de Máximo e Mínimo Locais:

Se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável e $f': I \to \mathbb{R}$ é também derivável, então:

$f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0 \Rightarrow$ a é ponto de máximo.

$f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0 \Rightarrow$ a é ponto de mínimo.

d) Pontos de Inflexão:

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável tal que f' e f'' sejam também deriváveis. Se $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$, então:

$f'(a) = 0 \Rightarrow$ a é ponto de inflexão horizontal.

$f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ a é ponto de inflexão oblíqua.

e) Interpretação Geométrica.

A derivada de f no ponto a é o coeficiente angular da reta t, tangente a curva f no ponto P(a, f(a)).

A equação da reta tangente à curva f no ponto de abscissa a é $y - f(a) = f'(a)\,.\,(x-a)$.

Exemplo:

Determine o ponto de máximo (ou mínimo) de uma função quadrática.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = f(x_v) = a\,.\,\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \;\therefore$$

$$\therefore\ y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$