Álgebra – Sistemas Lineares

1. DEFINIÇÕES

a) Sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Obs.: Se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, o sistema é homogêneo.

b) Matriz Incompleta.

$$M.I. = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

c) Matriz Completa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

d) Se a matriz incompleta for quadrada o seu determinante é chamado determinante do sistema (D).

2. SISTEMA NORMAL

a) $m = n$ e $D \neq 0$

b) Teorema de Cramer – qualquer sistema normal é possível e determinado.

c) Resolução (regra de Cramer)

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}; \dots; x_n = \frac{D_n}{D}$$

3. CARACTERÍSTICA

A característica de uma matriz é "p" se, e somente se:

a) Existir um menor de ordem p (determinante) diferente de zero.

b) Todos os menores de ordem p + 1 (determinante) que se obtém ORLANDO o menor de ordem p do item (a) são iguais a zero.

4. DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Sendo: p, a característica de M.I.
q, a característica de M.C.
n, o número de incógnitas

O teorema de Rouché-Cappelli nos permite concluir que:

a) $p \neq q \Leftrightarrow$ (s) é impossível (nenhuma solução).

b) $p = q = n \Leftrightarrow$ (s) é possível e determinado (única solução).

c) $p = q < n \Leftrightarrow$ (s) é possível e indeterminado (infinitas soluções).

5. SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

a) $p = q$, sempre $\Rightarrow$ sistema possível.

b) a enupla $(0, 0, \dots, 0)$ sempre é solução (trivial).

c) $p = n \Rightarrow$ só admite a solução trivial.

d) $p < n \Rightarrow$ outras soluções além da trivial.

Exemplo:

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{4}{4} = 1; \quad y = \frac{8}{4} = 2; \quad z = \frac{12}{4} = 3$$

Solução: $(x; y; z) = (1; 2; 3)$