Álgebra – Matrizes e Determinantes I

I. MATRIZES

1. DEFINIÇÕES

a) Matriz m x n

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Se m = n então a matriz M é quadrada.

b) Matriz nula

$0 = (x_{ij})_{m \times n}$ tal que $x_{ij} = 0$

c) Matriz identidade ou unidade de ordem n.

$I_n = (x_{ij})_{n \times n}$ tal que $x_{ij} = 1$ se $i = j$ e $x_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

d) Matriz oposta

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz então $B = (b_{ij})_{m \times n}$ é a matriz oposta de A se e somente se $b_{ij} = -a_{ij}$.

e) Matriz transposta.

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é uma matriz então $A^t = (a'_{ij})_{n \times m}$ é a matriz transposta de A se e somente se $a'_{ji} = a_{ij}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

f) Matrizes iguais

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ são matrizes iguais, se, e somente se,

$$\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}.$$

2. OPERAÇÕES

a) Adição

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ então C = A + B se, e somente se, $\mathbf{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$.

b) Multiplicação (de número por matriz)

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e α é um número qualquer então $B = \alpha . A$ se, e somente se, $\mathbf{b_{ij} = \alpha . a_{ij}}$.

c) Multiplicação (de matriz por matriz)

Se $A = (a_{ik})_{m \times p}$, $B = (b_{kj})_{p \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ então C = A.B se, e somente se,

$$\mathbf{c_{ij} = a_{i1} . b_{1j} + a_{i2} . b_{2j} + \dots + a_{ip} . b_{pj}}.$$

3. PROPRIEDADES

As propriedades das operações com números reais valem para as operações com matrizes, porém, na multiplicação de matrizes não valem as propriedades comutativa, anulamento do produto e cancelamento, ou seja:

a) Existem matrizes A e B tais que $A . B \neq B . A$

Álgebra – Matrizes e Determinantes II

b) Pode-se ter A . B = 0 mesmo com A ≠ 0 e B ≠ 0.

c) Pode-se ter A . C = B . C mesmo com A ≠ B e C ≠ 0.

Se A e B são matrizes conformes para operação indicada em cada caso e α é um número qualquer então:

d) $(A^t)^t = A$

e) $(A + B)^t = A^t + B^t$

f) $(\alpha \, . \, A)^t = \alpha \, . \, A^t$

g) $(A \, . \, B)^t = B^t \, . \, A^t$

II. DETERMINANTES

1. DEFINIÇÕES

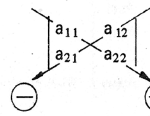
a) Determinante de matriz de 1ª ordem.
Se $M = (a_{11})$ então $\det M = a_{11}$

b) Determinante de matriz de ordem $n \geqslant 2$.
O determinante é igual à soma dos produtos $(-1)^P \, . \, a_{1\alpha_1} \, a_{2\alpha_2} \, a_{3\alpha_3} \ldots a_{n\alpha_n}$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ é uma permutação genérica dos segundos índices e p é o número de inversões em relação à fundamental 1, 2, 3, . . ., n.

c) Cofator A_{ij}
Se $M = (a_{11})$ então $A_{11} = 1$.
Se M é matriz quadrada de ordem $n \geqslant 2$ então $A_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, D_{ij}$ onde D_{ij} é o determinante que se obtém de M suprimindo a linha i e a coluna j.

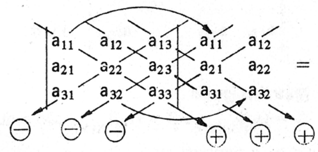
2. REGRAS PRÁTICAS

a) Determinante de ordem 2:



$= a_{11} \, . \, a_{22} - a_{12} \, . \, a_{21}$

b) Determinante de ordem 3:



$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + \\ - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

3. PROPRIEDADES

Grupo 1 – Teoremas de Laplace e Cauchy

Numa matriz quadrada a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer:

a) pelos respectivos cofatores é igual ao determinante da matriz. (T. de Laplace)

b) pelos cofatores dos elementos correspondentes de outra fila paralela é zero. (T. de Cauchy)

Grupo 2 – Determinante igual a zero.

O determinante de uma matriz quadrada é igual a zero, se a matriz possui:

a) uma fila nula.

b) duas filas paralelas iguais.

c) duas filas paralelas proporcionais.

d) uma fila que é combinação linear das outras filas paralelas.

Grupo 3 – Determinante não se altera.

O determinante de uma matriz quadrada não se altera se:

a) trocarmos ordenadamente linhas por colunas (det M = det M^t).

b) somarmos a uma fila uma combinação linear de outras filas paralelas (T. de Jacobi).

Grupo 4 – Alterações no deteminante

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n altera-se:

a) trocando de sinal, quando duas filas paralelas trocam de lugar entre si.

b) ficando multiplicado por α, quando os elementos de uma fila são multiplicados por α.

c) ficando multiplicado por α^n quando a matriz é multiplicada por α.

Grupo 5 – Propriedades complementares

a) Teorema de Binet – Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem então **det (AB) = det A . det B.**

b) $\begin{vmatrix} a & p+q & x \\ b & m+n & y \\ c & r+s & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & m & y \\ c & r & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & q & x \\ b & n & y \\ c & s & z \end{vmatrix}$

c) Determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ y & z & c & 0 \\ m & n & p & d \end{vmatrix} = abcd$

III. MATRIZ INVERSA

1. DEFINIÇÃO

M^{-1} é inversa de M se, e somente se, $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$

2. EXISTÊNCIA

M é inversível se, e somente se, det M $\neq 0$.

3. ELEMENTO

$$b_{ij} \text{ de } M^{-1} = \frac{\text{cofator de } a_{ji} \text{ de M}}{\det M}$$

4. REGRA

a) Calcule det M

b) Determine a matriz dos cofatores de M: M′

c) Determine a matriz adjunta: $\overline{M} = M'^t$

d) Aplique a fórmula: $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} . \overline{M}$

5. PROPRIEDADES

a) A^{-1} é única.

b) $(A^{-1})^{-1} = A$

c) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

d) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

e) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

6. EXEMPLO

Determine a inversa da matriz M dada:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Det M = 6 - 5 = 1 $\therefore$ det M $\neq 0$

b) $M' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\overline{M} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

d) $M^{-1} = \dfrac{1}{1} . \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$