Álgebra – Progressão Aritmética e Progressão Geométrica

1. SEQUÊNCIA REAL

Definição: é toda função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um único número real a_n.

Notação: $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ onde $a_1, a_2, \ldots$ são chamados termos da seqüência.

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

a) Definição:

Dados os números a e r define-se: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.A. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}$$

b) Termo Geral: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

c) Soma: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

d) Propriedades:

1) $a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, isto é: numa P.A. cada termo, a partir do segundo, é média aritmética entre o anterior e o posterior.

2) $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$, ou seja: considerando os n primeiros termos de uma P.A. a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

a) Definição:

Dados os números a e q define-se: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.G. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$$

b) Termo Geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

c) Produto: $|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

d) Propriedades

1) $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, isto é: numa P.G. cada termo, a partir do segundo, é média geométrica entre o anterior e o posterior.

2) $a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$, ou seja: considerando os n primeiros termos de uma P.G., o produto de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

e) Soma dos termos da P.G.:

1) Se $q = 1$ então $S_n = n \cdot a_1$

2) Se $q \neq 1$ então:

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

3) Se $-1 < q < 1$ então

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

4. EXEMPLOS

1. Problema proposto a Gauss quando o mesmo deduziu intuitivamente uma forma de obter a soma dos n primeiros termos de uma P.A.

   Ache a soma dos primeiros 100 números naturais (excluindo o zero).

   $a_1 = 1 \quad r = 1$

   $a_n = 100$

   $n = 100 \quad S_{100} = \dfrac{1 + 100}{2} \times 100 = 5050$

2. Em um tabuleiro de xadrez, colocando-se 1 grão de milho na 1ª casa, 2 na 2ª, 4 na 3ª e assim sucessivamente até a 64ª casa, qual o número total de grãos de milho teremos sobre o tabuleiro?

   Observa-se uma P.G.

   Com $a_1 = 1$

   $q = 2$

   $n = 64$

   logo:

   $$S_n = \frac{1 (2^{64} - 1)}{1} = 2^{64} - 1$$