Álgebra — Funções I

1. FUNÇÃO OU APLICAÇÃO

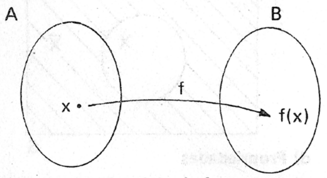
a) Definição

Seja f uma Relação Binária de A em B. Dizemos que f é uma Função de A em B se, e somente se, estão verificadas as seguintes condições:

F.1. — **Todo** $x \in A$ se relaciona com **algum** $y \in B$.

F.2. — **Cada** $x \in A$ que se relaciona, relaciona-se com um **único** $y \in B$.

O único $y \in B$ chama-se IMAGEM DE x PELA FUNÇÃO f e é indicado por f(x).



b) Conjunto domínio de f

$$D(f) = A$$

c) Conjunto contradomínio de f

$$CD(f) = B$$

d) Conjunto-Imagem de f

$$Im(f) = \{ f(x) \in B \mid x \in A \}$$

2. TIPOS DE FUNÇÕES

a) Função Sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, $\mathbf{Im(f) = CD(f)}$.

b) Função Injetora

Uma função $f: A \to B$ é injetora, se e somente se:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in A$$

c) Função Bijetora

Uma função $f: A \to B$ é bijetora, se e somente se, f é **sobrejetora** e **injetora**.

3. FUNÇÕES MONOTÔNICAS (MONÓTONAS)

Sejam: $f: A \to B$ uma função, I um subconjunto de A e x_1 e x_2 elementos de I.

a) f é ESTRITAMENTE CRESCENTE EM I se, e somente se:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

b) f é CRESCENTE EM I se, e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) \leqslant f(x_2)}$$

c) f é ESTRITAMENTE DECRESCENTE EM I, se e somente se:

$$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

d) f é DECRESCENTE EM I, se e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) \geqslant f(x_2)}$$

e) f é CONSTANTE EM I se, e somente se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \boxed{f(x_1) = f(x_2)},\ \forall x_1, x_2 \in I$$

4. FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Seja $f: A \to R$ uma função.

a) f é uma **Função Par** se, e somente se:

$\boxed{f(-x) = f(x)}$, para todo $x \in A$.

b) f é uma **Função Ímpar** se, e somente se:

$\boxed{f(-x) = -f(x)}$, para todo $x \in A$

c) O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo dos y.

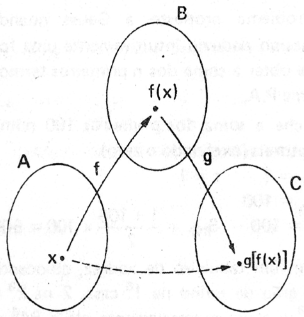
d) O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema de coordenadas.

5. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ duas funções.

Chama-se Função Composta de f com g à função $gof: A \to C$, tal que:

$$\boxed{(gof)\ (x) = g\ [\ f(x)\ ]}$$

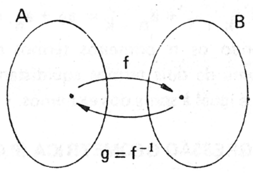


6. FUNÇÃO INVERSA

Seja $f: A \to B$ uma função e i a função identidade.

Se existir uma função $g: B \to A$ tal que:
a) $gof = i_A$ b) $fog = i_B$

dizemos que g é a função inversa de f e a indicamos por f^{-1}.



Observemos que:

1) A função $f: A \to B$ é inversível se, e somente se, f é bijetora.

2) Para se determinar a sentença da função inversa basta:

a) isolar x na sentença de f
b) trocar x por y.

3) **Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.**

7. FUNÇÃO LIMITADA

Seja $f: A \to R$ uma função.

A função f é limitada se, e somente se, existem a e b reais tais que:

$$\boxed{a \leqslant f(x) \leqslant b}$$

Se f é uma função limitada, o seu gráfico está contido em uma faixa horizontal.

8. FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função $f: A \to R$ é periódica se, e somente se, existe $p \in R^*$, tal que.

$$\mathbf{f(x + p) = f(x)}, \text{ para todo } x \in A.$$

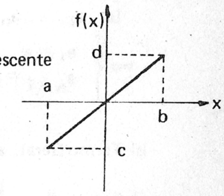
Se $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in A$, então $f(x + K.p) = f(x)$ para todo $x \in A$, com $K \in Z$.

Se uma função é periódica então o menor valor positivo de p chama-se período de f.

9. EXEMPLOS

a) $f: [\ a\ ;\ b\ ] \to [\ c\ ;\ d\ ]$ tal que $f(x) = x$

A função é:
Bijetora
Estritamente crescente
Ímpar
Inversível
Limitada



b) $f: [\ a\ ;\ b\ ] \to [\ 0\ ;\ d\ ]$ tal que $f(x) = x^2$

A função é:
Sobrejetora
Par
Limitada
A função não é injetora.