Álgebra – Conjuntos Numéricos I

1. NÚMEROS NATURAIS

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

b) **Divisão Euclidiana em $\mathbb{N}$**

$$\begin{array}{l|l} a & b \neq 0 \\ \hline r & q \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \cdot q + r \\ r < b \end{cases}$$

Se $r = 0$ a divisão é chamada **exata**.
Se $a < b$ então $q = 0$ e $r = a$

2. NÚMEROS INTEIROS

a) $\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

b) **Múltiplo e divisor em $\mathbb{Z}$**

$a = b \cdot c \Rightarrow \begin{cases} \textbf{a} \text{ é múltiplo de } \textbf{b} \text{ e de } \textbf{c} \\ \textbf{b} \text{ e } \textbf{c} \text{ são divisores (fatores) de } \textbf{a} \end{cases}$

c) **Conjunto dos múltiplos de a**

$M(a) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ak, k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{0, \pm a, \pm 2a, \ldots\}$

d) **Número par e número ímpar**

$a \in \mathbb{Z}$ é par $\Leftrightarrow a \in M(2) \Leftrightarrow \mathbf{a = 2k}, k \in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z}$ é ímpar $\Leftrightarrow a \notin M(2) \Leftrightarrow \mathbf{a = 2k + 1}, k \in \mathbb{Z}$

e) **Número primo e número composto**

$p \in \mathbb{Z}$ é primo $\Leftrightarrow \begin{cases} p \neq 0, p \neq 1, p \neq -1 \\ D(p) = \{1, -1, p, -p\} \end{cases}$

$a \in \mathbb{Z}$ é composto $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1 \\ n[D(a)] > 4 \end{cases}$

f) **Teorema fundamental da aritmética**

Todo número composto pode ser decomposto (fatorado) num produto de fatores primos. A menos da ordem dos fatores e do sinal dos fatores, a decomposição é única.

É a decomposição em fatores primos, da qual obtemos o Dispositivo Prático para obter todos os divisores naturais de um número natural.

g) **Exemplo**

Obter os divisores naturais de 120

		1	**divisores naturais de 120**
120	2	2	
60	2	4	
30	2	8	
15	3	3, 6, 12, 24	
5	5	5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120	
1			

h) **Número de divisores**

Se $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, onde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os fatores primos naturais, distintos, do número natural a e $k_1, k_2, \ldots, k_n$ os respectivos expoentes, então o **número de divisores naturais de a é**

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot (k_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_n + 1)$$

i) **mdc e mmc**

$\text{mdc}(a, b) = \text{máx}[D(a) \cap D(b)]$

$\text{mmc}(a, b) = \text{mín}[M_+^*(a) \cap M_+^*(b)]$

j) **Propriedades do mdc e do mmc**

$\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = a \cdot b, \ \forall a, b \in \mathbb{N}^*$
$D(a) \cap D(b) = D[\text{mdc}(a, b)]$
$M_+^*(a) \cap M_+^*(b) = M_+^*[\text{mmc}(a, b)]$

k) **Números primos entre si**

a e b primos entre si $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ **mdc(a, b) = 1** $\Leftrightarrow$ **mmc(a, b) = ab**

l) **Teoremas importantes**

1) Se x divide a e x divide b então x divide $a \pm b$.

Álgebra – Conjuntos Numéricos II

$$\left.\begin{array}{l} x \in D(a) \\ x \in D(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x \in D(a \pm b)}$$

2) Se p é primo e p divide a.b então p é divisor de a ou p é divisor de b.

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ primo} \\ p \in D(a.b) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{p \in D(a) \text{ ou } p \in D(b)}$$

3) Se a é divisor de x, b é divisor de x, a e b são primos entre si então ab é divisor de x.

$$\left.\begin{array}{l} a \in D(x) \\ b \in D(x) \\ \text{mdc}\,(a,b) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a\,.\,b \in D(x)}$$

4) **mdc (a; b) = mdc (a; a ± b)**

3. NÚMEROS RACIONAIS

a) $\mathbb{Q} = \{\, x \mid x = \dfrac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^* \}$

b) Todo número racional é **inteiro** ou **decimal exato** ou **decimal não exato e periódico** (dízima periódica)

c) **Exemplos**

Inteiros: $\dfrac{3}{1} = 3$; $\dfrac{0}{2} = 0$; $\dfrac{10}{2} = 5$; etc...

Decimais Exatos: $\dfrac{6}{5} = 1{,}2$; $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$; etc...

Decimais Não Exatos Periódicos:

$\dfrac{2}{3} = 0{,}666...$; $\dfrac{37}{30} = 1{,}2333...$

d) **Fração geratriz da dízima periódica**

$$0{,}414141... = \frac{41}{99}$$

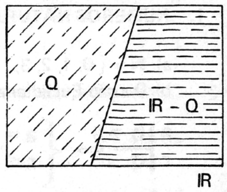
$$1{,}2333... = \frac{12{,}333...}{10} = \frac{12 + 0{,}333...}{10} = \frac{12 + \dfrac{3}{9}}{10} = \frac{37}{30}$$

e) Os únicos números que não são racionais (isto é: que não podem ser escritos na forma $\dfrac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$) são os **decimais não exatos e não periódicos.** Estes números são chamados **irracionais.** O conjunto dos números irracionais é representado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Exemplos: $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc. .

4. NÚMEROS REAIS

a) O conjunto dos números reais é a união dos **racionais** com os **irracionais**

b) Observe que:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \phi$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ (reais positivos)

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (reais estrit. positivos)

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ (reais negativos)

$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ (reais estrit. negativos)

c) **Fechamento**

$r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \pm s \in \mathbb{Q}$ $r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r\,.\,s \in \mathbb{Q}$ $r \in \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$
$r \in \mathbb{Q}$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow r \pm \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $r \in \mathbb{Q}^*$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow r.\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $r \in \mathbb{Q}^*$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{r}{\alpha} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$
$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \pm \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}$