Álgebra – Binômio de Newton e Análise Combinatória – I

1. FATORIAL

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2. NÚMERO BINOMIAL

Definição:

$$\begin{cases} n \geq k \Rightarrow \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0 \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{N})$$

Propriedades:

a) Binomiais complementares são iguais

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) Relação de STIFEL

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

c) Relação de FERMAT

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

3. TRIÂNGULO DE PASCAL

$$\binom{0}{0} \xrightarrow{(b)} 2^n$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \qquad (c)$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \qquad (d)$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

. . . .

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \binom{n}{4} \cdots \binom{n}{n}$$

. . . .

4. APLICAÇÕES

a) A relação de STIFEL pode ser memorizada assim:

$$\begin{array}{c} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \\ \| \\ \binom{n+1}{k+1} \end{array}$$

b) Soma na linha

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

c) Soma na coluna

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

d) Soma na diagonal

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+2}{2} + \ldots + \binom{n}{n-k} = \binom{n+1}{n-k}$$

Álgebra – Binômio de Newton e Análise Combinatória – II

5. TEOREMA DO BINÔMIO

a) $(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0} . x^n . y^0}_{} + \underbrace{\binom{n}{1} . x^{n-1} . y^1}_{} + \underbrace{\binom{n}{2} . x^{n-2} . y^2}_{} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{k} . x^{n-k} . y^k}_{} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} . x^0 . y^n}_{} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} . x^{n-k} . y^k}_{}$

b) Cálculo dos coeficientes

A maneira mais prática de calcular os coeficientes é lembrar que o primeiro é **sempre igual a 1** e os demais são calculados a partir do anterior pela relação de Fermat:

(cada coeficiente) x (expoente de x) ÷ (expoente de y aumentado de 1) = coeficiente seguinte

c) Termo Geral

O termo de ordem $k+1$ do desenvolvimento, feito segundo os **expoentes decrescentes** de x, é: $T_{k+1} = \binom{n}{k} . x^{n-k} . y^k$

O termo de ordem $k+1$ do desenvolvimento, feito segundo os **expoentes crescentes** de x, é: $T_{k+1} = \binom{n}{k} . x^k . y^{n-k}$

d) Número de parcelas: o desenvolvimento de $(x+y)^n$ tem $n+1$ parcelas.

e) Soma de Coeficientes: a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(ax+by)^n$, com a e b constantes é $(a+b)^n$

6. ARRANJOS

São agrupamentos que diferem entre si ou pela **natureza** ou pela **ordem** de seus elementos.

a) Cálculo dos arranjos simples:

$$\boxed{A_{n,k} = \underbrace{n.(n-1).(n-2). \ldots .(n-k+1)}_{\text{k fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

b) Cálculo dos arranjos com repetição

$$\boxed{A^*_{n,k} = \underbrace{n.n.n. \ldots .n}_{\text{k fatores}} = n^k}$$

7. PERMUTAÇÃO

São agrupamentos que diferem entre si apenas pela **ordem** dos seus elementos.

As permutações são um caso particular dos arranjos em que n = k

a) Cálculo das permutações simples

$$\boxed{P_n = A_{n,n} \Rightarrow P_n = n!}$$

b) Cálculo das permutações com elementos repetidos.

$$\boxed{P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}}$$

8. COMBINAÇÕES

São agrupamentos que diferem entre si apenas pela **natureza** de seus elementos.

a) Cálculo das combinações simples

$$\boxed{C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

b) Cálculo das combinações com repetição

$$\boxed{C^*_{n,k} = C_{n+k-1,\,k}}$$