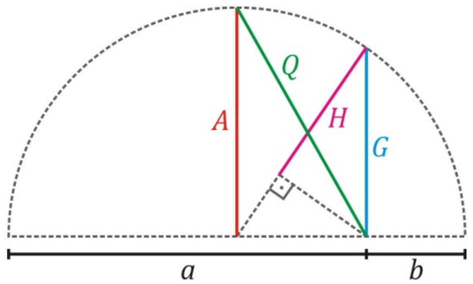
1. Introdução

Arquitas de Tarento, um matemático pitagórico que viveu por volta de 400 a.C., definiu que existiam três tipos de média entre dois números, a dizer, a aritmética, a geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada de harmônica). Depois, por influência da estatística, definiu-se a média quadrática.

Tipo	Definição: um número m (segundo) é a média aritmética de dois outros número, a (primeiro) e b (terceiro), quando	Matematicamente
Aritmética	o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excesso do segundo para o terceiro	$a - m = m - b$
Geométrica	a proporção do segundo para o terceiro é igual à proporção do primeiro para o segundo	$\frac{m}{b} = \frac{a}{m}$
Harmônica	a quantidade que o primeiro excede o segundo em relação ao primeiro é igual à quantidade que o segundo excede o terceiro em relação ao terceiro.	$\frac{a-m}{a} = \frac{m-b}{b}$
Quadrática	o excesso do quadrado do primeiro para o quadrado do segundo é igual ao excesso do quadrado do segundo para o quadrado do terceiro	$a^2 - m^2 = m^2 - b^2$

Nos chamados três meios de Pitágoras mais o quadrático, as diferentes médias entre dois números a e b são definidas como



$$m_A = \frac{a+b}{2} \qquad m_G = \sqrt[2]{a \cdot b}$$

$$m_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad m_Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Fig. 1 – Representação geométrica das médias aritmética (A), geométrica (G), harmônica (H) e quadrática (Q)

Para ilustrar a diferença entre esses diferentes tipos de média é mostrado na Figura 2 as médias entre a e b, para diferentes valores de b entre 0 e a (= 100).

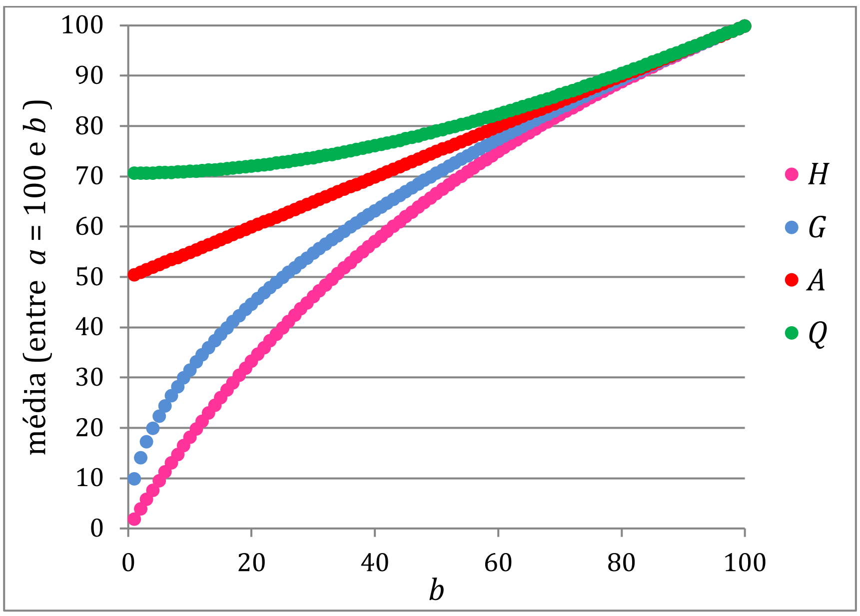


Fig. 2 – Note que $\forall\, b \in [0, a], b \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq a$

Estendendo o conceito de média para um conjunto numérico com N elementos, $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$, determinar a média equivale a encontrar um valor único, x_m, que, por representar qualquer elemento do conjunto, produz o mesmo efeito que qualquer um dos elementos. Assim tem-se

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_N\} \equiv \{x_i = \bar{x} \ \forall\ i \mid 1 \leq i \leq N\}$$

2. Média Aritmética

Definição: soma dos N números dividida pelo total de números N
Matemática:

$$\bar{x}_A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

- *Comentário:* É um método para derivar a tendência central de um espaço amostral.
Enquanto a média aritmética é muitas vezes usado para relatar tendência central , não é uma estatística robusta , o que significa que é muito influenciada pelos valores extremos. Nomeadamente, para a distribuição assimétrica , a média aritmética não pode, de acordo com a própria noção de “meio”, e as estatísticas robustas, como a mediana pode ser a melhor descrição da tendência central.

Média Aritmética Ponderada

Definição: soma dos produtos de cada número pelo seu peso, dividida pela soma dos pesos.
Matemática:

$$\bar{x}_{Ap} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_N x_N}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_{Ap} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}}$$

Nota: se $w_i = 1 \ \forall\ i$, então $\bar{x}_{Ap} = \bar{x}_A$.

3. Média Geométrica

Definição: raiz N-ésima do produto dos N números.
Matemática:

$$\bar{x}_G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_G = \left[\prod_{i=1}^{N} x_i\right]^{\frac{1}{N}}}$$

- *Comentário*: o dado é obtido a partir de um dado anterior.
A média geométrica só se aplica aos números positivos. [1] É também muitas vezes utilizado para um conjunto de números cujos valores se destinam a ser multiplicado juntos ou são exponenciais na natureza, tais como dados sobre o crescimento da população humana ou taxas de juros de um investimento financeiro.

Média Geométrica Ponderada

Matemática:

$$\bar{x}_{Gp} = \sqrt[w_1 + w_2 + \cdots + w_N]{x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \cdot \cdots \cdot x_N^{w_N}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_{Gp} = \left[\prod_{i=1}^{N} x_i^{w_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_i}}}$$

Nota: se $w_i = 1 \ \forall\ i$, então $\bar{x}_{Gp} = \bar{x}_G$.

4. Média Harmônica

Definição: é o inverso da média aritmética dos inversos dos dados.
Matemática:

$$\bar{x}_H = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_N}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}}$$

Comentário: A média harmônica é particularmente recomendada para uma série de valores que são inversamente proporcionais, ou seja, taxas e razões, como para o cálculo da velocidade média, custo médio de bens comprados com uma quantia fixa.

Média Harmônica Ponderada

Matemática:

$$\bar{x}_{Hp} = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_N}{\frac{w_1}{x_1} + \frac{w_2}{x_2} + \cdots + \frac{w_N}{x_N}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_{Hp} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{w_i}{x_i}}}$$

Nota: se $w_i = 1\ \forall\ i$, então $\bar{x}_{Hp} = \bar{x}_H$.

5. Média Quadrática (RMS – Root Mean Square)

Texto: raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos *N* dados.
Matemática:

$$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}}$$

- *Comentário*: A média quadrática é muito útil nos casos em que os valores seguem uma distribuição simétrica centrada no valor zero, onde a média aritmética, moda e mediana teriam valor nulo (zero)

Média Quadrática Ponderada

Matemática:

$$\bar{x}_{Qp} = \sqrt{\frac{(w_1 x_1)^2 + (w_2 x_2)^2 + \cdots + (w_N x_N)^2}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{x}_{Qp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (w_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} w_i}}}$$

Nota: se $w_i = 1\ \forall\ i$, então $\bar{x}_{Qp} = \bar{x}_Q$.

6. Conclusão

O gráfico na Fig.2 compara dois elementos $\{a, b\}$. Cabe notar que à medida que $b \to a$, ou seja, quando a diferença entre as medidas a e b tende a zero,

$$\bar{x}_A \cong \bar{x}_G \cong \bar{x}_H \cong \bar{x}_Q$$

Porém, no cenário de laboratório, não se pode garantir a igualdade entre as medidas. Diferentes médias podem apresentar valores consideravelmente discrepantes. O exemplo a seguir ilustra isso. A partir de um conjunto de medidas $\{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_N\}$, determinou-se as grandezas via dois caminhos

	Área de uma esfera	Período de um pêndulo simples
Média das medidas, Cálculo da grandeza	$A = \pi x_{med}^2, \quad x_{med} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} x_{med}^{\frac{1}{2}}, \quad x_{med} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
Cálculo com cada medida Média das grandezas	$A_{med} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i\,, \quad A_i = \pi x_i^2$	$T_{med} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i\,, \quad T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} x_i^{\frac{1}{2}}$
Verifica-se	$A \leq A_{med}$	$T \geq T_{med}$

A diferença nos resultados tem origem na propagação da incerteza das medidas. Para o cenário de um laboratório é necessário um procedimento padrão o mais neutro possível. Esse procedimento é primeiro determinar a média aritmética do conjunto de medidas,

$$x_{med} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

para depois realizar o cálculo da grandeza.

7. Resumo e Aplicações

Média	Fórmula	Desvio	Comentários
Aritmética	$\bar{x}_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$\Delta\bar{x}_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \bar{x}_A \rvert$	Em estatística a média aritmética tem o nome "esperança"
Geométrica	$\bar{x}_G = \left[\prod_{i=1}^{N} x_i\right]^{\frac{1}{N}}$	$\Delta\bar{x}_G = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_G)^2}$	Desvio padrão populacional
Harmônica	$\bar{x}_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$	$\Delta\bar{x}_H = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lvert x_i - \bar{x}_H \rvert$	
Quadrática	$\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}}$	$\Delta\bar{x}_Q = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}_Q\right)^2}$	Desvio padrão amostral

Abaixo segue uma tabela com algumas aplicações das médias.

	Aritmética	Geométrica	Harmônica	Quadrática
Mecânica	• Molas em paralelo • Centro de massa	•	• Molas em série • Média das velocidades	• Incerteza
Termodinâmica	•	•	•	• temperatura
Eletromagnetismo	• Resistores em série • Capacitores em pararelo	• Indutância mútua	• Resistores em paralelo • Capacitores em série	• Corrente eficaz • Tensão eficaz
Finanças	•	• Juros compostos	• Taxas e razões • Relação preço/ganho	•
Estatística	• Valor central	• Crescimento populacional	•	• Desvio padrão

8. Referências

[1] Carl B. Boyer. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[2] Lucas N. H. Bunt, Philip S Jones, Jack D. Bedient. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover, 1976.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_mean, .../Harmonic_mean, .../Geometric_mean, .../Quadratic_mean, .../Root_mean_square (acesso: julho/2017)