A equação cúbica é da forma

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad \text{com } a_3 \neq 0 \tag{1}$$

Interessa determinar os valores de x que satisfazem a equação. Fala-se em raízes. A Figura 1 mostra a existência de três tipos de raízes para a eq. (1). A região entre as linhas (-1) e (1) fornece três raízes reais. As regiões acima de (1) e abaixo de (-1) tem-se uma raiz real e duas imaginárias.

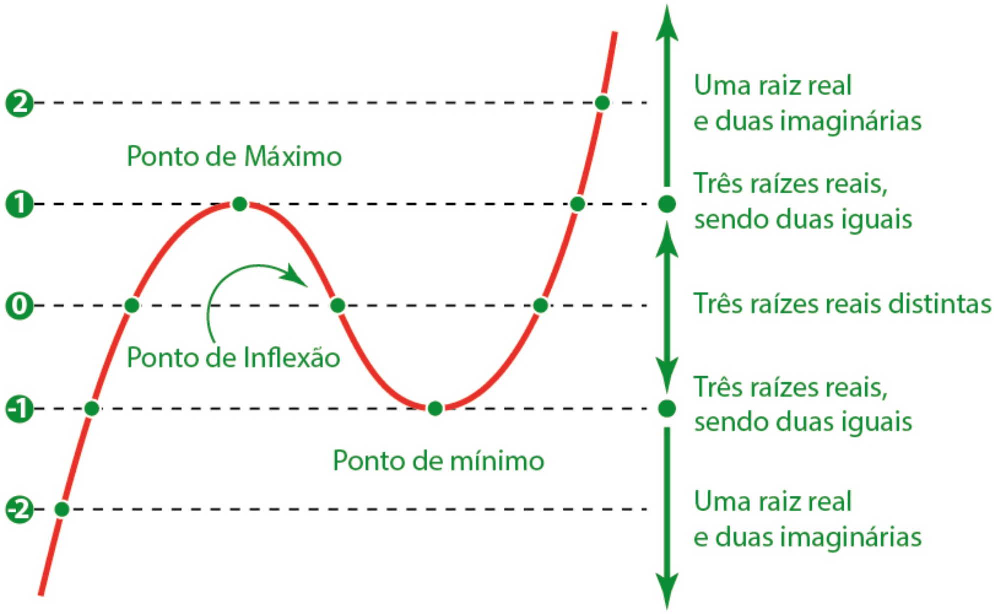

Fig. 1 – Gráfico segmento de curva da eq. (1). A linha (0) apresenta três raízes reais, sendo que uma delas coincide com o ponto de inflexão; as linhas (-1) e (1) evidenciam três raízes reais, sendo duas iguais, os pontos de mínimo e de máximo, respectivamente; as linhas (-2) e (2) mostram apenas uma raiz real, e as outras duas raízes são complexas e conjugadas.

Busca-se solução da forma

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \tag{2}$$

As raízes da eq. (1), explicitadas na eq. (2) podem ser determinadas por meio de álgebra, cuja solução exata é atribuída a Tartaglia que a derivou e a Cardano que a publicou[1]. A seguir as raízes são determinadas baseado no método de Hudde[2], o qual tem a vantagem inicial de operar com números mais simples, quiçá inteiros.

1) Calcular os coeficientes m e n

$$m = 3(3a_1a_3 - a_2^2)$$

$$n = 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 + 27a_0a_3^2$$

---

[1]  Nicoló Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia,  Girolamo Cardano (1501-1576).

[2]  Johannes (van Waveren) Hudde (1628-1704).

2) Calcular o discriminante D

$$D = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$$

Propriedades:

- Se $D > 0$ → uma raiz real, duas raízes imaginárias conjugadas.
- Se $D = 0$ → três raízes reais, sendo duas iguais.
- Se $D < 0$ → três raízes reais distintas.

3) Casos $D > 0$ e $D = 0$

Calcular os radicais A e B

$$A = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{D}} \quad \text{e} \quad B = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{D}}$$

Se $D > 0$, região externa à região [-1, 1] na Figura 1, as raízes são

$$x_1 = A + B$$

$$x_2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{(A-B)}{2}\sqrt{3}$$

$$x_3 = -\frac{A+B}{2} - i\frac{(A-B)}{2}\sqrt{3}$$

Se $D = 0$, linhas [-1] e [1] na Figura 1, as raízes são

$$x_1 = A + B$$

$$x_2 = x_3 = -\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

4) Caso $D < 0$

Região]-1, 1[na Figura 1. Determinar os parâmetros

$$\rho = \sqrt{-\left(\frac{m}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad \varphi = \cos^{-1}\left(-\frac{n}{2\rho}\right)$$

onde φ é dado em radianos; e determinar as raízes

$$x_{k+1} = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right), \quad \text{para } k = 0, 1, 2$$

Cabe notar para $\varphi \in\ ]0,\ \pi[$ tem-se que $x_1 > x_3 > x_2$.

5) E finalmente, para qualquer caso acima, a transformação

$$x_k \to \frac{x_k - a_2}{3a_3}, \qquad k = 1, 2, 3$$

leva às raízes procuradas.

Referências:

Miquel y Merino, P. *Elementos de Algebra Superior*. Vol. 1, 4ª ed. Cultural. Habana, 1948.
Imagens matemáticos: Wikipedia.