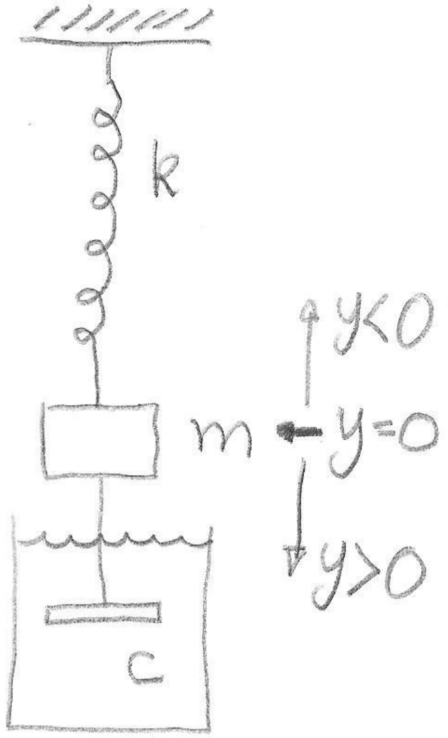
prof. norba



No sistema ao lado a dinâmica do corpo é regida pelas forças elástica

$$F_{el} = -ky$$

e viscosa

$$F_{vis} = -c\frac{dy}{dt}$$

onde k é a constante elástica e c é o coeficiente de viscosidade. A força peso, por ser constante, tem o papel de definir a posição de equilíbrio (veja Apêndice A).

Interessa $y(t)$. Pela 2ª Lei de Newton

$$F_{res} = ma$$

$$F_{el} + F_{vis} = ma$$

$$-ky - c\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\gamma}\frac{dy}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}y = 0$$

considere 2γ ω_0^2 (do M.H.S.)

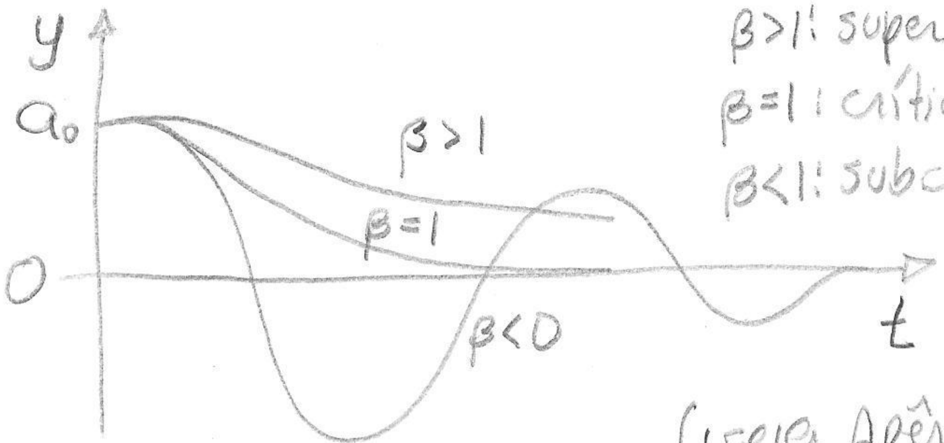
e a notação de Newton: $dy/dt = \dot{y}$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\gamma\cdot\dot{y} + \omega_0^2 y = 0}$$

equação diferencial de segunda ordem homogênea e linear

filofima.com.br

Os parâmetros γ e ω_0 são determinantes para a análise da dinâmica. Define-se $\beta = \frac{\gamma}{\omega_0}$ e verifica-se



$\beta>1$: supercrítico
$\beta=1$: crítico
$\beta<1$: subcrítico

(veja Apêndice B)

a) caso $\beta>1$: supercrítico

o corpo deslocado da origem não retornará à posição de equilíbrio. A dinâmica é dada por

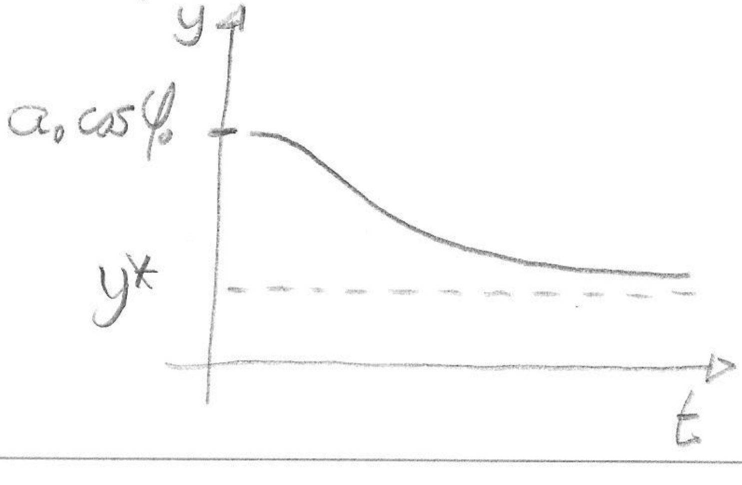
$$\boxed{y(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cosh(\Omega \cdot t + \varphi_0)}$$

onde $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ é a pulsação amortecida.

φ_0 é uma fase inicial

(vide apêndice B)

Graficamente



prof. norba
filofima.com.br

Para certo t^*, $\dot{y}(t^*) = 0$ levando a escrever

$$y(t^*) = y^* > 0 \,, \ \forall \, t \geq t^*$$

ou seja o sistema para fora do ponto de equilíbrio, quando

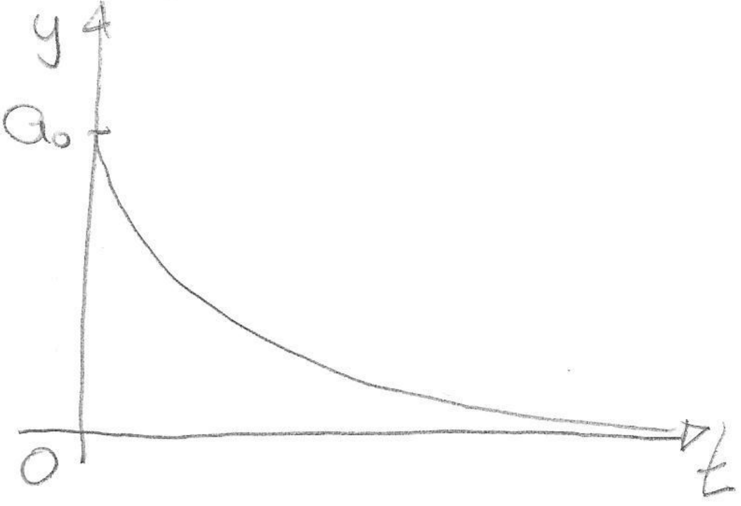
$$t^* = \frac{1}{\omega_a}\left[\operatorname{arctanh}\left(\frac{\gamma}{\omega_a}\right) - \varphi_0\right]$$

b) Caso $\beta = 1$

o corpo deslocado da origem retornará à posição de equilíbrio assintoticamente. A dinâmica é dada por

$$\boxed{y(t) = [a_0 + (v_0 + a_0\gamma)t]\,e^{-\gamma t}}$$

onde v_0 é a velocidade inicial.
Graficamente (vide apêndice B)



prof. norba
filofima.com.br

prof. norba
filofima.com.br

c) caso $\beta < 1$

o corpo deslocado da origem retornará ao ponto de equilíbrio oscilantemente. A dinâmica é dada por

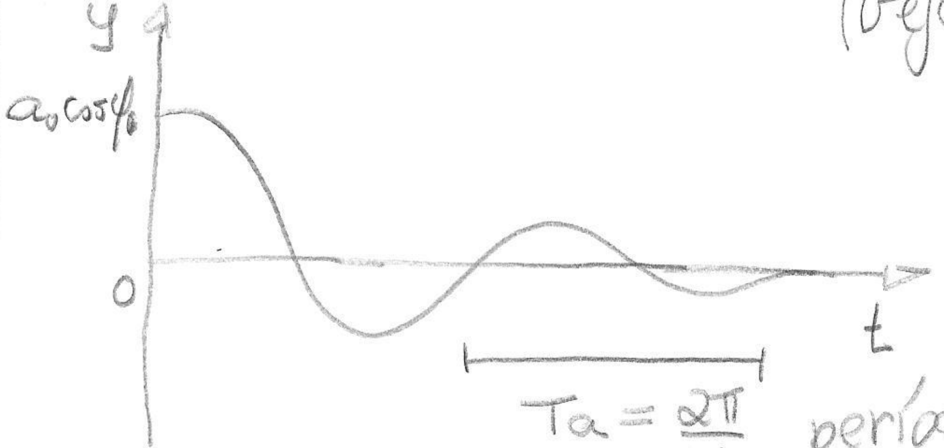
$$\boxed{y(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi_0)}$$

onde $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ é a pulsação amortecida

e

φ_0 é a fase inicial

(veja apêndice B)



$T_a = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$ período amortecido

Interessa conhecer a energia mecânica dissipada por período; e determinar fator de qualidade do sistema, $Q (\geq 1)$

i) energia mecânica dissipada no ciclo

$$W_{diss} = W_0 \left[1 - e^{-2\gamma \cdot T_a} \right]$$

onde

$$W_0 = \frac{k a_0^2}{2} \left[\cos^2\varphi_0 + \cos^2(\varphi_0 + \delta) \right]$$

sendo $\delta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a}{\gamma}\right)$ (2º Quadrante)

onde δ é uma fase associada à velocidade (escalar) de oscilação.

ii) o fator de qualidade Q (≥ 1) relaciona a energia total do sistema com a energia dissipada por ciclo, o que leva a

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma \cdot T_a}}}$$

Note que se $\gamma \to 0$ a dissipação é desprezível e $Q \to \infty$ (oscilador livre). A situação é semelhante para $\omega_0 >> \gamma$ e neste caso pode-se escrever

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{m \cdot k}}{c}}$$

(veja Apêndice C)

Note que o fator de qualidade é determinado a partir dos parâmetros estruturais do sistema: massa do corpo (m), constante elástica (k) e coeficiente de viscosidade (c).

prof. norba
filofima.com.br

Apêndice A

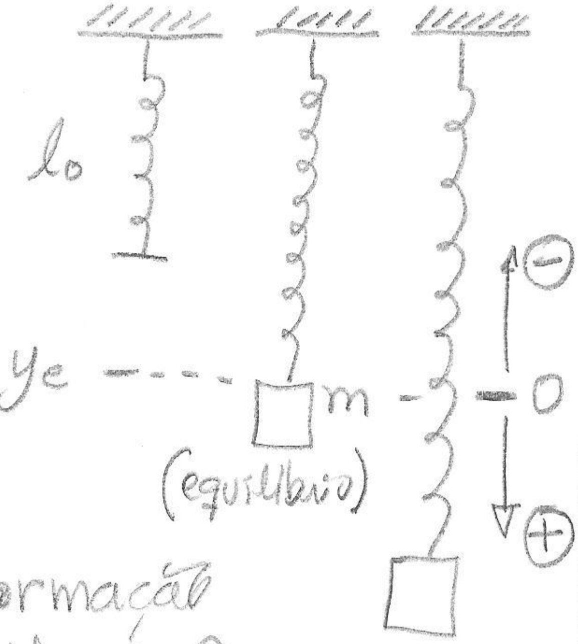
A mola (ideal) tem comprimento natural l_0.
Com a presença do corpo deforma a mola até estabelecer o equilíbrio

$$|\vec{F}_{el}| = |\vec{P}|$$

$$\underbrace{k(y_e - l_0)}_{} = mg$$

ou

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$



onde y_0 é referência (deformação devido ao peso do corpo). Na dinâmica deve-se notar que

$$P + F_{el} + F_{vis} = F_{res}$$

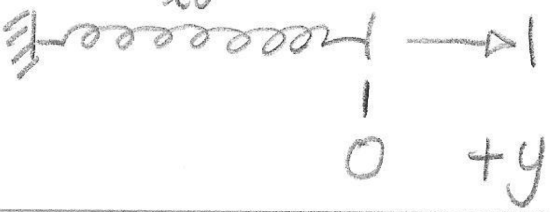
$$mg - k(y + y_0) + F_{vis} = F_{res}$$

$$\cancel{ky_0} - ky - \cancel{ky_0} + F_{vis} = F_{res}$$

a força peso não participa da dinâmica.
Assim tem-se

$$-ky - c\dot{y} = m\ddot{y}$$

Cabe notar que y representa a deformação da mola, e $y=0$ é feito sobre o comprimento natural da mola



Apêndice B

Dada a equação diferencial

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

busca-se $y(t)$. A análise inicial mostra que a função deve as propriedades

$$t = 0 \begin{cases} y(0) = \begin{cases} a_0 \\ 0 \end{cases} \\ \dot{y}(0) = \begin{cases} 0 \\ v_0 \end{cases} \end{cases} \quad e \quad t \to \infty \begin{cases} y = \begin{cases} 0 \\ a^* < a_0 \end{cases} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

Duas funções são candidatas à solução

$$y = ce^{pt} \quad e \quad y = cte^{pt}$$

onde c e r são constantes definidas pelo sistema.

- Primeira: $y = ce^{pt}$

$$\dot{y} = pce^{pt} = p \cdot y$$
$$\ddot{y} = p^2ce^{pt} = p^2 \cdot y$$

substituindo

$$p^2\cancel{y} + 2\gamma p\cancel{y} + \omega_0^2\cancel{y} = 0 \quad (y \neq 0)$$
$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$$

Por Báskara

$$p = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

ou

$$p_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad p_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

portanto duas soluções.

prof. norba
filofima.com.br

Dois importantes teoremas

i) sendo $y = y_1(t)$ solução de uma equação diferencial linear e homogênea, então $y = Cy_1(t)$ onde C é uma constante qualquer, também é uma solução

ii) sendo $y = y_1(t)$ e $y = y_2(t)$ duas soluções de uma equação diferencial linear e homogênea, então $y = y_1(t) + y_2(t)$ é também uma solução.

Assim a solução da equação diferencial será

$$y(t) = c_1 e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + c_2 e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

onde c_1 e c_2 serão determinados a partir da análise de γ e ω_0 e das condições iniciais.

Definindo-se $\beta = \dfrac{\gamma}{\omega_0}$ tem-se três possibilidades

$\beta > 1$, $\beta = 1$, $\beta < 1$.

A solução acima é adequada para os casos $\beta > 1$ e $\beta < 1$, mas não para o caso $\beta = 1$ pois reduz a solução a uma única forma. É o caso de se usar a segunda solução, ou melhor testar!

prof. norba
filofima.com.br

• Segunda $y = cte^{pt}$

$$\dot{y} = ce^{pt} + pcte^{pt} = (1+pt)ce^{pt}$$

$$\ddot{y} = pce^{pt} + p(1+pt)ce^{pt}$$

$$= (2p+p^2t)ce^{pt}$$

substituindo

$$(2p+p^2t)\cancel{c}\cancel{e^{pt}} + 2\gamma(1+pt)\cancel{c}\cancel{e^{pt}} + \omega_0^2\cancel{c}t\cancel{e^{pt}} = 0$$

$$2p+p^2t+2\gamma+2\gamma pt+\omega_0^2t = 0$$

$$(p^2+2\gamma p+\omega_0^2)t + 2(p+\gamma) = 0$$

sendo $p = -\gamma$ e $\gamma^2 = \omega_0^2$, está satisfeita a equação para qualquer t.

a) caso $\beta = 1$: crítico

$$y = c_1 e^{-\gamma t} + c_2 t e^{-\gamma t}$$

onde c_1 e c_2 podem ser determinados mediante condições iniciais.

Para $t = 0$ $\quad y = a_0 \Rightarrow a_0 = c_1 + 0$

$$\dot{y} = v_0$$

como $\dot{y} = -\gamma a_0 e^{-\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t} - \gamma c_2 t e^{-\gamma t}$

em $t = 0$

$$v_0 = -\gamma a_0 + c_2 - 0 \Rightarrow c_2 = v_0 + \gamma y_0$$

Assim a solução é

$$\boxed{y(t) = \left[a_0 + (v_0 + \gamma a_0)t\right]e^{-\gamma t}}$$

caso $\beta = 1$

Note que a_0 e v_0 podem ser positivo, negativo, nulo.

prof. norba
filofima.com.br

b) caso $\beta > 1$: supercrítico

Seja $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, então

$$y = c_1 e^{(-\gamma+\Omega)t} + c_2 e^{(-\gamma-\Omega)t}$$

Como c_1 e c_2 são constantes que dependem das condições iniciais, pode-se escrever

$$c_1 = \frac{a_0}{2} e^{+\varphi_0} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{a_0}{2} e^{-\varphi_0}$$

onde φ_0 é a fase inicial. Substituindo e fatorando tem-se

$$y = a_0 e^{-\gamma t} \left[\frac{e^{\Omega t + \varphi_0} + e^{-(\Omega t + \varphi_0)}}{2} \right]$$

Reconhecendo a identidade

$$\frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$ tem-se a solução

para o oscilador supercrítico

$$\boxed{y(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cosh(\Omega t + \varphi_0)}$$

prof. norba
filofima.com.br

c) Caso $\beta < 1$: subcrítico

Neste caso verifica-se $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$.

Para encontrar a solução define-se

$$\sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \gamma^2)} = j\omega_a$$

onde

$$j = \sqrt{-1} \quad e \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{denominada} \\ \text{pulsação} \\ \text{amortecida} \end{array} \right.$$

Assim pode-se escrever

$$y = C_1 e^{(-\gamma + j\omega_a)t} + C_2 e^{(-\gamma - j\omega_a)t}$$

Como os argumentos apresentam números complexos, as constantes serão complexas, dependentes das condições iniciais. Assim,

$$C_1 = \frac{a_0}{2} e^{+j\varphi_0} \quad e \quad C_2 = \underset{\text{(conjugado)}}{C_1^*} = \frac{a_0}{2} e^{-j\varphi_0}$$

Substituindo e fatorando

$$y = a_0 e^{-\gamma t} \cdot \left[\frac{e^{j(\omega_a t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_a t + \varphi_0)}}{2} \right]$$

Reconhecendo a identidade

$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$$ tem-se a solução

$$\boxed{y(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi_0)}$$

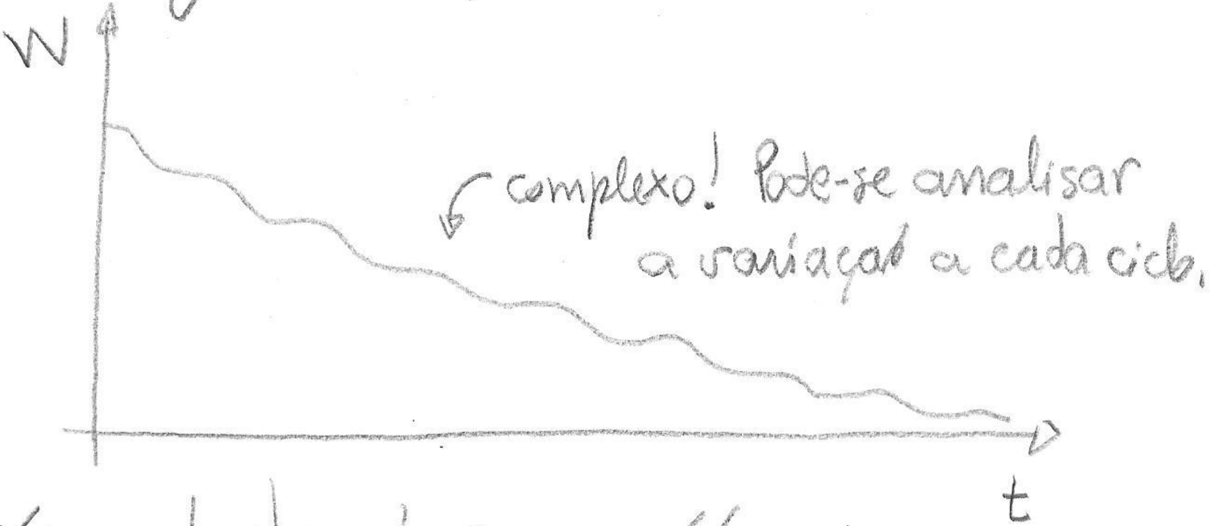
prof. norba
filofima.com.br

d) Análise Energética do Oscilador Subcrítico

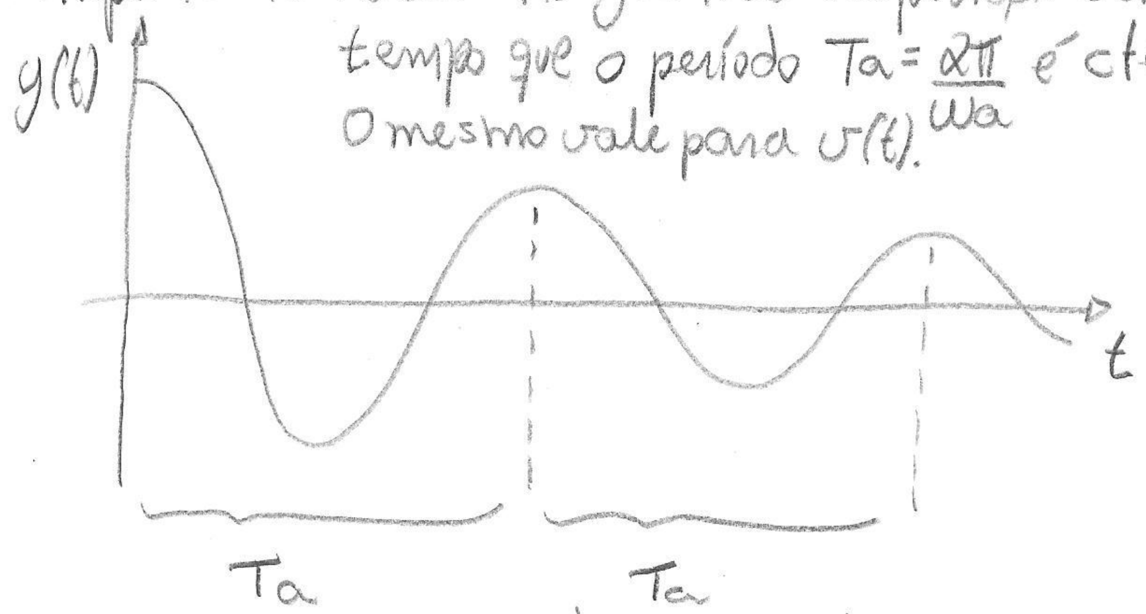
A energia mecânica do sistema, dada por

$$W = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

não é constante, visto que a força viscosa tem o papel da força de atrito na dissipação da energia.



É importante notar no gráfico da posição versus tempo que o período $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ é cte. O mesmo vale para $v(t)$.

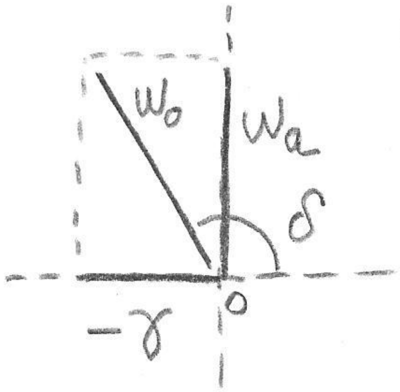


Assim a energia dissipada em cada ciclo (período) é constante. Interessa quantificá-la.

A velocidade do corpo é dada por

$$v = \dot{y} = a_0 e^{-\gamma t}\left[-\gamma \cos\varphi - \omega_a \,\mathrm{sen}\,\varphi\right]$$

onde $\varphi = \omega_a t + \varphi_0$. Com intuito de simplificar a notação considere o arranjo trigonométrico



dado $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ pode-se escrever

$$\omega_0^2 = \omega_a^2 + \gamma^2$$

e definir $\cos\delta = \dfrac{-\gamma}{\omega_0}$,

$$\mathrm{sen}\,\delta = \frac{\omega_a}{\omega_0}$$

e $\tan\delta = \dfrac{\omega_a}{-\gamma}$. Assim, o fator entre chaves,

$$-\gamma\cos\varphi - \omega_a\,\mathrm{sen}\,\varphi =$$

$$= \omega_0\left[\left(\frac{-\gamma}{\omega_0}\right)\cos\varphi - \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\right]$$

$$= \omega_0\left[\cos\delta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right]$$

Reconhecendo a identidade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$, tem-se

$$-\gamma\cos\varphi - \omega_a\,\mathrm{sen}\,\varphi = \omega_0\cos(\varphi+\delta)$$

e a velocidade é reescrita como

prof. norba
filofima.com.br

$$\boxed{\dot{y} = a_0 \omega_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi_0 + \delta)}$$

onde $\boxed{\delta = \pi - \tan\left(\frac{\gamma}{\omega_a}\right)}$ (2º Quadrante)

Quanto à periodicidade, tem-se que

$$\cos(\omega_a t + cte) = \cos(\omega_a(t+T_a) + cte)$$

$$= \cos(\omega_a t + cte + \omega_a T_a)$$

$$= \cos(\omega_a t + cte + 2\pi)$$

$$= \cos(\omega_a t + cte)\cos(2\pi)^{1} - \operatorname{sen}(\omega_a t + cte) \cdot \cancel{\operatorname{sen}(2\pi)}^{0}$$

$$= \cos(\omega_a t + cte).$$

Ou seja, vale para $y(t)$ e para $\dot{y}(t)$.

De volta à energia mecânica, pode-se escrever

$$W(t) = \frac{1}{2} k \left[a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi_0)\right]^2 + \frac{1}{2} m \left[a_0 \underbrace{\omega_0}_{\sqrt{k/m}} e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \varphi_0 + \delta)\right]^2$$

prof. norba
filofima.com.br

$$W(t) = \frac{ka_0^2}{2} e^{-2\gamma t}\left[\cos\varphi + \cos(\varphi+\delta)\right]^2$$

onde $\varphi = \omega_a t + \varphi_0$. Em $t=0$ tem-se

$$W_0 = \frac{ka_0^2}{2}\left[\cos\varphi_0 + \cos(\varphi_0+\delta)\right]^2$$

é a energia mecânica inicial do sistema.
A energia dissipada a cada ciclo é dada por

$$W_{diss} = \left|W(t+T_a) - W(t)\right|$$

$$= \left| \frac{ka_0^2}{2} e^{-2\gamma(t+T_a)} \cdot \left[\cos\varphi + \cos(\varphi+\delta)\right]^2 - \frac{ka_0^2}{2} e^{-2\gamma t}\left[\cos\varphi + \cos(\varphi+\delta)\right]^2 \right|$$

$$= \left| \underbrace{\frac{ka_0^2}{2} e^{-2\gamma t}\left[\cos\varphi + \cos(\varphi+\delta)\right]^2}_{W(t)} \left(1 - e^{-2\gamma T_a}\right) \right|$$

ou

$$W_{diss} = W \cdot \left(1 - e^{-2\gamma T_a}\right)$$

ou seja

$$\frac{W_{diss}}{W} = 1 - e^{-2\gamma T_a} \text{ é constante}$$

entre qualquer intervalo t e $t+T_a$.

prof. norba
filofima.com.br

Para $t=0$ tem-se $W(0) = W_0$ e a fração (ou percentagem) da energia mecânica dissipada a cada ciclo.

$$\boxed{\frac{W_{diss}}{W_0} = 1 - e^{-2\gamma T_a}}$$

Com esta equação pode-se determinar o fator de qualidade (ou de mérito) do sistema, definido como

$$Q = 2\pi \frac{W_0}{W_{diss}}$$

ou seja

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\gamma T_a}}}$$

Cabe notar que $Q > 1$ e para $\gamma \to 0$, $Q \to \infty$, ou seja, não há dissipação de energia

Apêndice C

Para $\omega_0 >> \gamma$ tem-se $\omega_a \cong \omega_0$, podendo-se escrever

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-4\pi\beta}}$$

pois $\gamma \cdot T_a = 2\pi \frac{\gamma}{\omega_a} \cong 2\pi \frac{\gamma}{\omega_0} = 2\pi\beta$

prof. norba
filofima.com.br

Visto que $\beta \ll 1$ (ou seja menor que 0,1) pode-se expandir a exponencial em série de Taylor e simplificar a expressão.
Como

$$e^{+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

tem-se que

$$e^{-4\pi\beta} \cong 1 - 4\pi\beta$$

quando truncada na primeira ordem. O fator de qualidade pode ser expresso como

$$Q = \frac{2\pi}{1-(1-4\pi\beta)} = \frac{\cancel{2\pi}}{{}_{2}\cancel{4\pi}\beta}$$

$$= \frac{\omega_0}{2\gamma}, \quad \text{mas } 2\gamma = \frac{c}{m}$$

$$\text{e } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

então

$$Q = \frac{\sqrt{k/m}}{c/m} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{m \cdot k}}{c}}$$

prof. norba
filofima.com.br