Ondulatória em Redes de Tensão

1) Introdução

a) Onda em corda (transversal)

A propagação de uma onda em uma corda é descrita com a equação

$$y(x,t) = y_m \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{1}$$

onde $k\left(=\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ é o número de onda, $\omega(=2\pi f)$ é a frequência angular e y_m é a amplitude da oscilação. A velocidade de propagação na corda esticada tem módulo $v = \sqrt{\tau/\mu}$, onde τ é a tensão de estiramento e μ é a densidade linear.

Com a corda fixa nas duas extremidades tem-se ondas estacionárias com as seguintes propriedades

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n}, \quad v = \frac{\omega}{k} \tag{2}$$

onde L é o comprimento da corda, n (= 1, 2, 3, ...) é a n-ésima frequência de ressonância.

Cabe notar que a velocidade, v, na eq. (2), traduz a rapidez com que a onda avança na corda (movimento longitudinal); é constante. Para conhecer a velocidade transversal, v_y, pode-se derivar em relação ao tempo a eq. (1).

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\omega \cdot y_m \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{3}$$

b) Onda sonora (longitudinal)

A propagação de uma onda sonora é descrita com as equações

$$s(x,t) = s_m \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad \text{ou} \quad \Delta P(x,t) = \Delta P_m \,\text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{4}$$

onde k é o número de onda, ω é a frequência angular, s_m é amplitude de deslocamento e ΔP_m é a amplitude da pressão. Esta pode ser escrita em termos de amplitude de deslocamento, s_m, como

$$\Delta P_m = v \cdot \rho \cdot \omega \cdot s_m \tag{5}$$

onde ρ é a densidade do ar e v é a velocidade do som. A partir da eq. (2) tem-se a velocidade máxima, $v_m = \omega \cdot s_m$. Cabe notar que citar a velocidade do vento, normalmente trata-se do valor eficaz da mesma, v_{ef}. Tem-se a relação entre eficaz e máxima (pico), $v_{ef} = v_m/\sqrt{2}$.

c) Combinando ondas.

A forma cilíndrica dos fios de alta tensão pode provocar a formação de vórtices no vento que passa por eles. As variações de pressão associadas aos vórtices podem fazer a linha oscilar (galopar), principalmente se a frequência das variações de pressão coincide com uma das frequências de ressonância do fio, ou seja, $f_{ar} = f_{fio}$. Além disso, ventos com incidência normal ao fio apresentam a propriedade $v_m = v_{y,m}$, e por consequência, $s_m = y_m$, ou seja, a amplitude do movimento (velocidade e deslocamento máximos) do vento coincide com amplitude transversal do movimento do fio (velocidade e deslocamento máximos).

Ondulatória em Redes de Tensão

2) Questão

A empresa Fios-Já Ltda. constrói linhas de transmissão como as da figura abaixo.

Ref.: Hydrogen Iodide at the English language Wikipedia,
CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Em linhas de transmissão compridas, as frequências de ressonância estão tão próximas que praticamente qualquer velocidade do vento pode excitar um modo de ressonância com amplitude suficiente para derrubar as torres de sustentação ou curto-circuitar as linhas (conf. Halliday).

Duas torres de energia distam L uma da outra. Dois fios de alta tensão com densidade linear μ e tensão de estiramento τ, estão dispostos paralelamente, separados por distância d. Em épocas de ventania, na região onde estão instaladas as torres, é comum ventos com velocidade de até v_{ef} (assumido valor eficaz). Considerando os dados fornecidos,

a) Determinar a melhor estimativa
   i) da velocidade da onda no fio
   ii) do comprimento de onda.
   iii) da frequência fundamental de oscilação dos fios.
   iv) para a amplitude de oscilação no fio provocada pela ação do vento, na época de ventania.

b) Estimar a distância mínima entre dois fios paralelos que impeça o curto-circuitar.
   Dica: a incerteza acrescentada à estimativa da amplitude de oscilação dos fios leva a um resultado mais adequado.

Ondulatória em Redes de Tensão

3) Apêndice

a) Velocidade da onda no fio

Estimativa	$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$
Incerteza relativa quadrática	$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu}\right)^2$

b) Comprimento de onda

Estimativa	$\lambda = 2L$
Incerteza	$\Delta\lambda = 2\Delta L$

c) Frequência fundamental

Estimativa	$f = \frac{v}{\lambda}$
Incerteza relativa quadrática	$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \left(-1\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2$

d) Amplitude de oscilação 1

Estimativa	$y_m = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\cdot\frac{v_{ef}}{f}$
Incerteza relativa quadrática	$\left(\frac{\Delta y_m}{y_m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta v_{ef}}{v_{ef}}\right)^2 + \left(-1\frac{\Delta f}{f}\right)^2$

e) Amplitude de oscilação 2

Estimativa	$y_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot v_{ef}\cdot L\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\tau}}$
Incerteza relativa quadrática	$\left(\frac{\Delta y_m}{y_m}\right)^2 = \left(\frac{\Delta v_{ef}}{v_{ef}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta\mu}{\mu}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2$

Obs.: Esta equação resulta a mesma estimativa que a equação em (d), porém a incerteza é menor (quase metade). A justificativa para essa diferença é o menor número de operações matemáticas para se chegar ao resultado. Procedimentos que resultam em menor incerteza são mais valorizados. Vale a pena verificar!