Ajuste Elevador

1) Introdução

a) Cinemática

Equações horárias da posição e da velocidade

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{a} \cdot \frac{t^2}{2}, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \tag{1}$$

onde
$\vec{r}_0$, é o vetor posição inicial (módulo em metros, m)
$\vec{v}_0$, é o vetor velocidade inicial (módulo em metros por segundo, m/s)
$\vec{a}\left(= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$, é o vetor aceleração (módulo em metro por segundo ao quadrado, m/s^2)

b) Dinâmica (translação)

O princípio da dinâmica para um corpo em movimento de translação define a força resultante

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} \tag{2}$$

onde
$\vec{F}_{res} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j$, é o vetor força resultante (módulo em newton, N)
m, é a massa (ou coeficiente inercial em quilograma, kg)
$\vec{a}\left(= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$, é o vetor aceleração (módulo em metro por segundo ao quadrado, m/s^2)

c) Dinâmica (rotação)

O princípio da dinâmica para um corpo em movimento de rotação define o torque resultante

$$\vec{\tau}_{res} = I \cdot \vec{\alpha} \tag{3}$$

onde
$\vec{\tau}_{res} = \sum_{j=1}^{n} \vec{\tau}_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j$, é o vetor torque resultante (módulo em newton-metro, N·m)
I, é o momento de inércia (ou coeficiente inercial em quilogramas-metro-quadrado, $kg \cdot m^2$)
$\vec{\alpha}$, é o vetor aceleração angular (módulo em radianos por segundo ao quadrado, rad/s^2)

d) Momento Inércia

O coeficiente inercial de um corpo em movimento rotacional em torno de um eixo é definido como

$$I = \int r^2 \cdot dm$$

Para objetos homogêneos, $dm = \rho \cdot dV$, de modo que
r: é o raio (em metro, m)
m: é a massa (em quilograma, kg)
ρ: é a densidade (em quilograma por metro cúbico, kg/m^3)
V: é o volume (em metro cúbico, m^3)

Para um disco de massa M e raio R, tem-se o momento de inércia dado por

$$I = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \tag{4}$$

e) Trabalho e Potência

A ação de uma força durante um deslocamento define trabalho

$$W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta \tag{5}$$

Ajuste Elevador

onde
Δr: é o módulo do deslocamento (em metro, m)
F: é o módulo da força (em newton, N)
θ: é o ângulo formado entre força e deslocamento (em grau, °)
W: é o trabalho (em joule, J)

Considerando o trabalho em dado intervalo de tempo, tem-se potência média

$$P_{med} = \frac{W}{\Delta t} \tag{6}$$

onde
W: é o trabalho (em joule, J)
t: é o tempo (em segundo, s)
P: é a potência (em watt, W); outra unidade de medida, 1 HP = 746 W

2) Elevador

A Fig. 1 mostra os principais elementos de um elevador de carga. O gráfico ao lado, Fig. 2, o elevador sobe com auxílio de motor, cujo esforço é menor devido à presença do contra-peso. O atrito é desconsiderado.

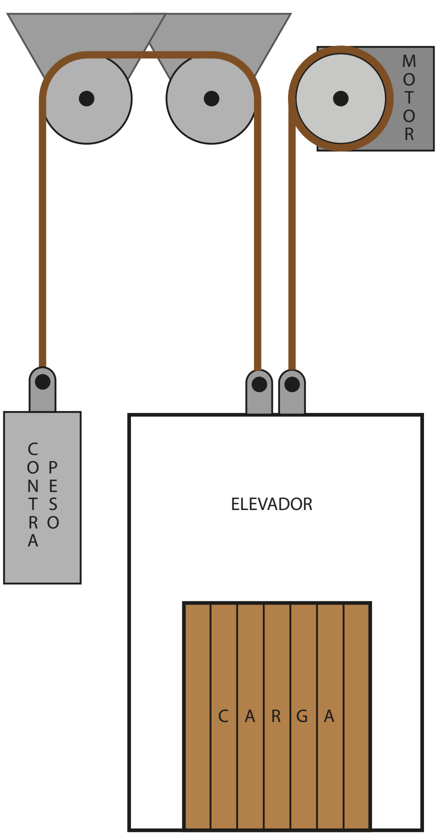


Fig. 1 – Esquema do elevador de carga

- Fios ideais
- Polias idênticas com massa M, raio R, sem atrito
- Motor com torque τ_M
- Massa do elevador (vazio), m_E
- Massa da carga, m_Q
- Contra-peso com massa m_{CP}

Gráfico do movimento ascendente

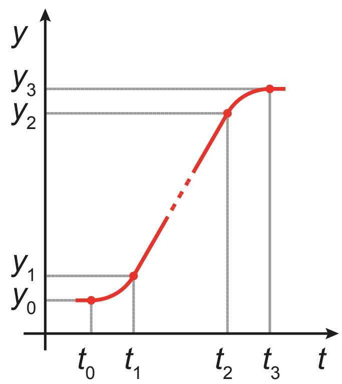


Fig. 2 – Movimento progressivo

Onde
$t_0 \leq t < t_1$: mov. progressivo, acelerado (etapa 1)
$t_1 \leq t \leq t_2$: mov. progressivo, uniforme (etapa 2)
$t_2 < t \leq t_3$: mov. progressivo, desacelerado (etapa 3)

Ajuste Elevador

a) Cinemática

i) Etapa 1 – Acelerado:

$$y_1 = y_0 + \frac{a_1}{2}(t_1 - t_0)^2, \quad v_1 = a_1(t_1 - t_0)$$

ii) Etapa 2 – Uniforme:

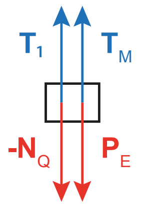
$$y_2 = y_1 + v_1 \cdot (t_2 - t_1), \quad v_2 = v_1$$

iii) Etapa 3 – Desacelerado:

$$y_3 = y_2 + v_2 \cdot (t_3 - t_2) - \frac{a_3}{2}(t_3 - t_2)^2, \quad v_3 = v_2 - a_3(t_3 - t_2)$$

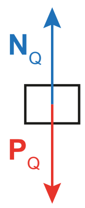
b) Dinâmica

i) Elevador



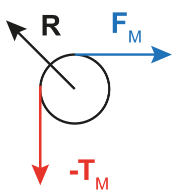
$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = F_y \hat{j}: \quad T_1 + T_M - P_E - N_Q = m_E \cdot a_y \\ \vec{\tau}_{res} = \vec{0} \end{cases} \tag{7}$$

ii) Carga



$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = F_y \hat{j}: \quad N_Q - P_Q = m_Q \cdot a_y \\ \vec{\tau}_{res} = \vec{0} \end{cases} \tag{8}$$

iii) Motor+Polia

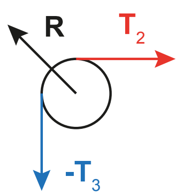


$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = 0: \\ \vec{\tau}_{res} = I \cdot \vec{\alpha}: \quad \tau_M - T_M \cdot R = I \cdot \alpha \end{cases} \tag{9}$$

não há escorregamento, de modo que $a_y = \alpha \cdot R$, também, $\tau_M = F_M \cdot R$

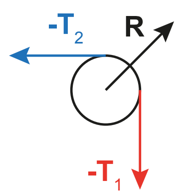
iv) Polias (elevador e contra-peso)

Esquerda



$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = 0: \\ \vec{\tau}_{res} = I \cdot \vec{\alpha}: \quad (T_3 - T_2)R = I \cdot \alpha \end{cases}$$

Direita

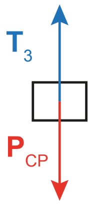


$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = 0: \\ \vec{\tau}_{res} = I \cdot \vec{\alpha}: \quad (T_2 - T_1)R = I \cdot \alpha \end{cases} \tag{10}$$

não há escorregamento, de modo que $a_y = \alpha \cdot R$

Ajuste Elevador

v) Contra Peso



$$\begin{cases} \vec{F}_{res} = -F_y\hat{j}: \quad P_{CP} - T_3 = m_{CP} \cdot a_y \\ \vec{\tau}_{res} = \vec{0} \end{cases} \tag{11}$$

3) Modelo

a) Cinemática

Um edifício tem altura H, subdivido por andares, cada um com altura A, o que permite escrever $H = n \cdot A$, onde n é o número de andares (ou o atual andar). Desta forma, $n = 0$ equivale ao térreo, $n = 3$ ao terceiro andar, e assim por diante. Notar que $n \in \mathbb{Z}$ (inteiro).

Um elevador que sobe partindo do repouso e volta ao repouso ao chegar ao destino, portanto deve acelerar e desacelerar. Também manter a velocidade.

O menor deslocamento é um andar, $\Delta n = 1$. Nesse trecho, admite-se que a primeira metade tem aceleração, na segunda metade desaceleração. Com a eq. (1)

i) Partida (por Torricelli) e isolando a_{pt}

$$a_{pt} = \frac{v_{max}^2}{A}, \quad t_{A/2} = \frac{A}{v_{max}}$$

ii) Chegada (por Torricelli)

$$a_{ch} = -\frac{v_{max}^2}{A}, \quad t_{A/2} = \frac{A}{v_{max}}$$

É comum adotar $|a| = 3{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ e $t_{A/2} = 1{,}0\ \mathrm{s}$, de modo que $|v_{max}| = 3{,}0\ \mathrm{m/s}$ para $A = 3{,}0\ \mathrm{m}$. Para deslocamentos superiores, $\Delta n \geq 2$, tem-se movimento uniforme. Com a eq. (1) pode-se escrever $(n-1) \cdot A = v \cdot (n-1) \cdot T$, onde T é o tempo para subir um andar com velocidade constante, ou seja, $T = A/v$. Notar que para o elevador subir apenas um andar, o tempo necessário é o dobro daquele tempo para deslocamentos superiores.

b) Dinâmica

Combinando as eq. (7) a (11) determina-se a aceleração do elevador

$$a = \frac{\frac{\tau_M}{R} - (m_E + m_Q - m_{CP})g}{m_E + m_Q + m_{CP} + 3\frac{I}{R^2}} \tag{12}$$

ou, conhecendo-se a aceleração (ou desaceleração), pode-se determinar a relação entre medidas como o torque do motor e a massa da carga. O motor é o elemento a ser determinado para ajustar o funcionamento do elevador. À exceção da aceleração, os demais parâmetros são fixos.

i) Partindo (fase 1)

$$\frac{\tau_{M,1}}{R} = (m_E - m_{CP})g + \left(m_E + m_{CP} + 3\frac{I}{R^2}\right)a + m_Q(g + a) \tag{13}$$

ii) Cruzeiro (fase 2)

$$\frac{\tau_{M,2}}{R} = (m_E + m_Q - m_{CP})g \tag{14}$$

iii) Chegando (fase 3)

$$\frac{\tau_{M,3}}{R} = (m_E - m_{CP})g - \left(m_E + m_{CP} + 3\frac{I}{R^2}\right)a + m_Q(g - a) \tag{15}$$

Ajuste Elevador

c) Refinando

Em repouso, a massa do contra-peso poderia ser igual a massa do elevador. Porém, com a dinâmica a situação fica diferente. A chegada permite ajustar a massa do contra peso. O torque apenas puxa o elevador para cima, de modo que o valor deve ser positivo, mesmo quando vazio. O valor máximo para a massa do contra-peso.

$$m_{CP,max} = \frac{m_E(g-a) - 3\frac{I}{R^2}a}{g+a} \quad (16)$$

d) Limite ideal

Com a eq. (16) na eq. (13) pode-se determinar o menor torque do motor na partida do elevador

$$\frac{\tau_{M,id}}{R} = \frac{2ag}{a+g}\left(2m_E + 3\frac{I}{R^2}\right) + m_Q(a+g) \quad (17)$$

Notar que em geral $m_{CP} < m_{CP,max}$, de modo que $\tau_M > \tau_{M,id}$.

e) Potência do motor

Conhecer a potência (elétrica) aplicada ao motor para a partida do elevador é importante para o dimensionamento dele, pois esta é máxima potência exigida do motor.

$$P_{med} = \frac{\frac{\tau_{M,1}}{R}\cdot\frac{A}{2}}{t_{A/2}} = \frac{\tau_{M,1}}{R}\cdot\frac{v_{max}}{2} \quad (18)$$

onde $\tau_{M,1}$ é o torque do motor na partida, R é o raio da polia, v_{max} é a velocidade máxima.

4) Problema

A empresa TransCarga S.A. fabrica elevadores de carga e de pessoas. Recebeu a encomenda de duas unidades iguais para carregar até 8 pessoas (560 kg), os quais serão instalados em um edifício em construção, onde cada andar tem 3,00 m de altura. É esperado que a velocidade de cruzeiro (que também é a máxima) seja igual a 3,00 m/s, subindo ou descendo.

A construtora solicitou algumas alterações no modelo proposto pela TransCarga de modo que as novas dimensões são

- Massa da carga: m_C (acrescentado 5% como margem de segurança)
- Massa do elevador: m_E (acrescentado itens de decoração)
- Massa do contra-peso: m_{CP} (sem alterações)
- Polias, 3 polias idênticas: massa M, raio R (sem alterações)
- Torque do motor(*): τ_M (sem alterações)
  (*) Por questões de segurança, o torque máximo (durante a partida) deve corresponder a 70% do valor nominal. Alterações no projeto podem afetar o dimensionamento do motor, deve ser avaliado.

O projeto foi aprovado. É necessário verificar a adequação do motor para este novo elevador.

a) Determinar a estimativa da potência do motor durante a partida (máxima), eq. (13).

b) Comparar a potência nominal do motor no estoque, operando em regime de trabalho (70%). Interessa saber se os motores em estoque podem ser usados no projeto, ou outros devem ser adquiridos e com qual potência nominal. Em caso negativo, alteração na massa do contra-peso pode alterar o resultado ou diminuir consumo energético?

c) Fornecer um parecer à chefia.