Altura de um Objeto

1) Introdução histórica

Com a intenção de distrair o imperador Venceslau I de Luxemburgo, o arquiteto e teórico de arte Leon Battista Alberti (1404-1472) propõe-lhe o seguinte problema[1]: Caso aviste o topo de uma torre da qual não consegue ver nada mais e queira conhecer sua altura, faça como se segue. Finque na terra sua flecha, coloque seu olho no nível do solo e mire o topo da torre; marque com uma cera o ponto de encontro com sua mirada, e chamemos **AB** a flecha, **C** o topo da torre, **D** o ponto em que mantém o olhar e **E** a marca da cera sobre a flecha. Feito isso, recue um pouco e, da mesma forma, mire a partir do solo o topo da torre e marque o lugar onde sua mirada encontrou a flecha, e chamemos **F** essa segunda marca de cera, e **G** o lugar onde estava seu olho para mirar, como podemos ver na figura ao lado. Note bem que há nessa figura quatro triângulos, dois dos quais são conhecidos: um grande, **FBG**, e um pequeno, **EBD**. A partir destes, podemos conhecer os dois triângulos maiores, um chamado **CHG** e outro **CHD**, e compreender que, **DB** corresponde a **EB** em seu triângulo, assim como **GH** corresponde a **HC** no triângulo maior.

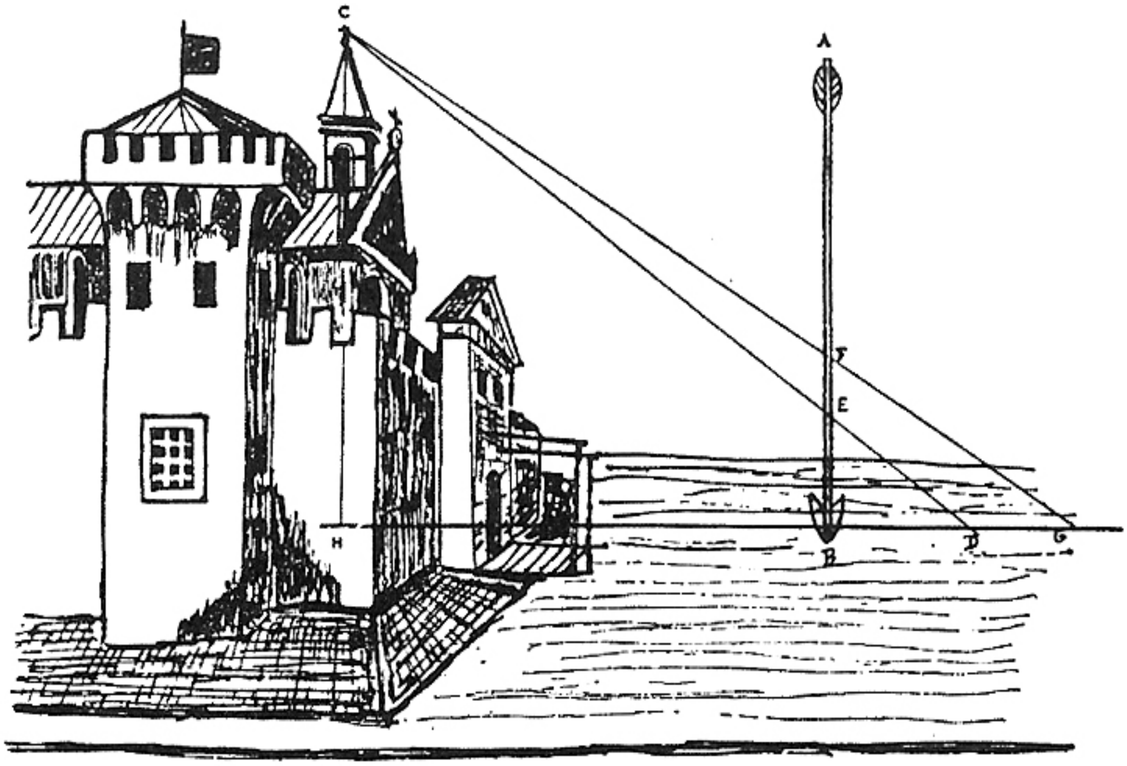

Fig. 1 – Ilustração do problema de Alberti.

O desenho da Fig. 1 pode ser esquematizado como

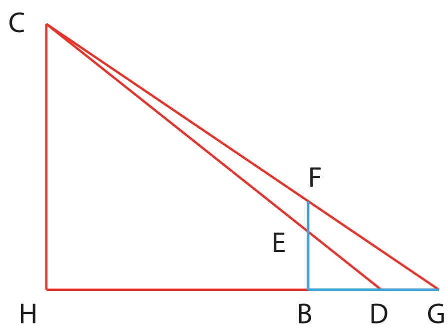

Fig. 2 – Esquema do problema de Alberti.

[1] Leon Battista Alberti. *Matemática Lúdica*, Rio de Janeiro: ed. Jorge Zahar, 2006 (pág. 37).

Altura de um Objeto

O interesse é o comprimento do segmento $\overline{HC}$, a altura do objeto (castelo). A partir dos triângulos HCG e BFG, usando a propriedade de semelhança de triângulos, tem-se a relação

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HG}}, \quad \overline{HG} = \overline{HB} + \overline{BG} \tag{1}$$

Semelhantemente com os triângulos HCD e BED

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HD}}, \quad \overline{HD} = \overline{HB} + \overline{BD} \tag{2}$$

Altura $\overline{HC}$ é encontrada combinando as equações (1) e (2)

$$\overline{HC} = \frac{\overline{BD} - \overline{BG}}{\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BE}} - \dfrac{\overline{BG}}{\overline{BF}}} \tag{3}$$

A eq. (3) mostra que quatro medidas de fácil execução permitem determinar uma medida de mais difícil obtenção. Também é possível determinar a distância horizontal $\overline{HB}$. Levando a eq. (3) na eq. (1) ou na eq. (2) tem-se

$$\overline{HB} = \frac{\overline{BF} - \overline{BE}}{\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}} - \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BG}}} \tag{4}$$

2) Problema

É preciso determinar a altura de um edifício de difícil acesso, como o da Fig. 3. Está do outro lado do rio.

Fig. 3 – Ilustração de um edifício de difícil acesso. (Ref.: gauchazh.clicrbs.com.br)

Altura de um Objeto

Como o edifício é de difícil acesso, uma solução é usar uma referência, como uma palmeira ilustrada na Fig. 4, e tomar as medidas $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{BG}$, conforme proposto por Alberti. Cabe notar que o edifício está no mesmo nível que referência (palmeira).

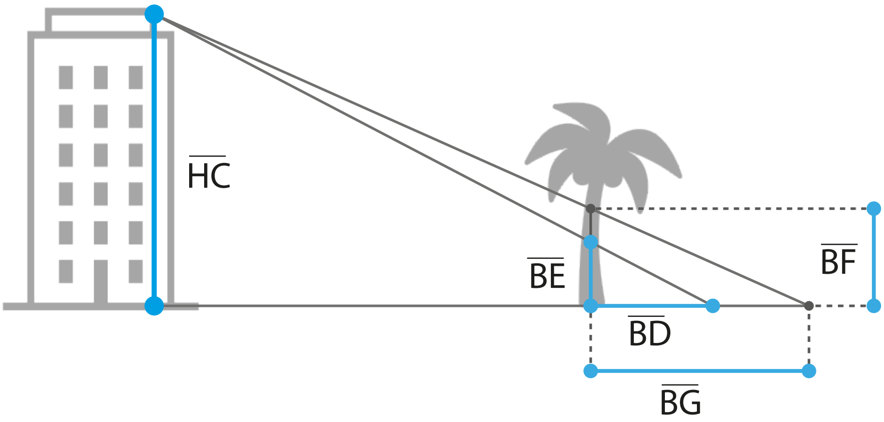

Fig. 4 – Complemento do Fig. 2, indicando as medidas contidas na tabela a seguir

A tabela a seguir contém medidas, feitas com o mesmo instrumento. A altura do edifício, $\overline{HC}$, é determinada com auxílio da eq. (3).

Medida	Comprimento, L, e Incerteza ΔL
$\overline{BD}$	
$\overline{BE}$	
$\overline{BF}$	
$\overline{BG}$	

3) Questões

a) Altura do edifício. Determinar
   i) a melhor estimativa para a altura do edifício – eq. (3)
   ii) o desvio de precisão para a altura do edifício.
b) Distância do ponto de referência ao edifício. Determinar
   i) a melhor estimativa para a distância do ponto de referência ao edifício – eq. (4)
   ii) o desvio de precisão para a distância do ponto de referência ao edifício.
c) Analisar os resultados.
   Dica: comparar a incerteza propagada com a incerteza instrumental; avaliar o desvio de precisão.

Altura de um Objeto

4) Apêndice

Cálculo da melhor estimativa para a expressão abaixo (menos carregada de símbolos)

$$H = \frac{D - G}{\frac{D}{E} - \frac{G}{F}}$$

Conhece-se as medidas, todas com a mesma unidade de medida. A medida $H \pm \Delta H$ terá a mesma unidade de medida que as demais

$$D \pm \Delta D \quad G \pm \Delta G \quad E \pm \Delta E \quad F \pm \Delta F$$

Para obter a melhor estimativa de *x*, uma estratégia é calcular medidas intermediárias

$$H = \frac{D - G}{m_1 - m_2} = \frac{m_3}{m_4} = m_5$$

seja

- medida 1

$$m_1 = \frac{D}{E}, \quad \Delta m_1 = m_1 \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(-1\,\frac{\Delta E}{E}\right)^2}$$

- medida 2

$$m_2 = \frac{G}{F}, \quad \Delta m_2 = m_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(-1\,\frac{\Delta F}{F}\right)^2}$$

- medida 3

$$m_3 = D - G, \quad \Delta m_3 = \sqrt{(\Delta D)^2 + (\Delta G)^2}$$

- medida 4

$$m_4 = m_1 - m_2, \quad \Delta m_4 = \sqrt{(\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2}$$

- medida 5 é o próprio H

$$H = m_5 = \frac{m_3}{m_4}, \quad \Delta H = \Delta m_5 = m_5 \sqrt{\left(\frac{\Delta m_3}{m_3}\right)^2 + \left(-1\,\frac{\Delta m_4}{m_4}\right)^2}$$

É possível arredondar as medidas a cada etapa do cálculo. Nesse caso, usar as regras de arredondamento. O valor final da medida *x* deve estar dentro dos padrões da ABNT.