

Hidroestática

1) Introdução

a) Empuxo

Um corpo total ou parcialmente imerso em um fluido sofre um empuxo. É uma força que age sobre o corpo com orientação vertical para cima e que em módulo é igual ao peso do fluido deslocado pelo volume do corpo imerso (Fig. 1). Matematicamente,

$$E = m_f \cdot g = \rho_f \cdot V_{obj} \cdot g \tag{1}$$

onde

- $\rho_f$  é a densidade do fluido (em  $\text{kg}/\text{m}^3$ )
- $V_{obj}$  é o volume do objeto (corpo) imerso no fluido (total ou parcialmente) (em  $\text{m}^3$ )
- $g$  é a aceleração da gravidade,  $g = (9,81 \pm 0,01) \text{ m}/\text{s}^2$ .

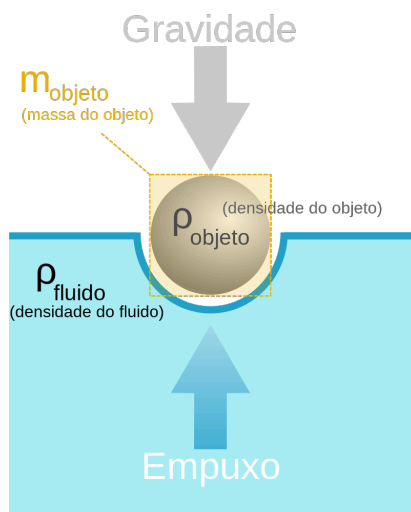


Fig. 1 – O empuxo é uma propriedade dos fluidos. (Ref.: pt.wikipedia.org)

b) Medida de empuxo

O empuxo pode ser determinado com uso de uma balança. Na Fig. 2a com o equilíbrio da balança tem-se o peso real do objeto (esfera), ou seja,  $T = m \cdot g$ . Na Fig. 2b, com a esfera imersa em fluido, a obtém-se o peso aparente,  $T' = m' \cdot g$ . O empuxo é medido tomando a diferença entre os dois pesos, ou seja,  $E = T - T'$ .

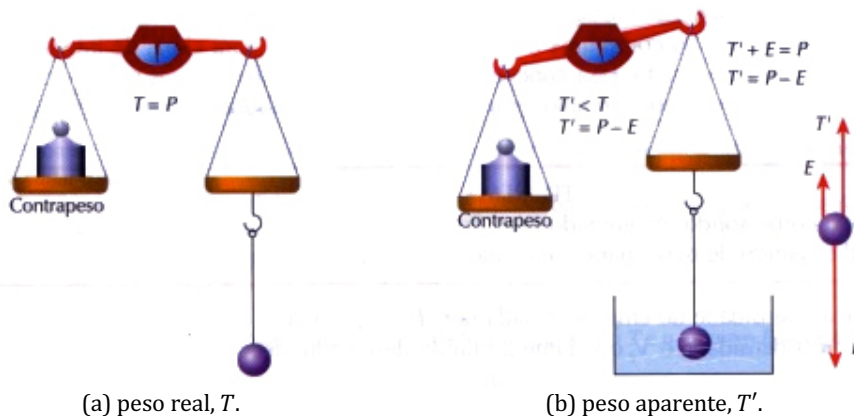


Fig. 2 – Determinação do empuxo com uso de balança e fluido. (Ref. if.ufrgs.br)



Hidrostatica

2) Latão

O latão é uma liga metálica composta pela junção de átomos de cobre (Cu) e zinco (Zn). Amplamente utilizado pela humanidade há mais de 4 mil anos, essa liga apresenta um brilho semelhante ao do ouro e é bastante maleável. Algumas de suas características são<sup>1</sup>:

- ductilidade;
- condutibilidade térmica e elétrica;
- custo-benefício;
- versatilidade de produção;
- resistência à corrosão;
- resistência mecânica.

A alta resistência à corrosão e choques mecânicos do latão o tornam um material de manuseio prático, podendo ser forjado, laminado, fundido e estirado a frio com mais facilidade que o cobre e o zinco separadamente.

É comum determinada liga ter um nome acompanhado de dois números, por exemplo, Liga A X<sub>1</sub>-X<sub>2</sub>. Neste caso, os números X<sub>1</sub> e X<sub>2</sub> representam a fração dos dois elementos que compõe a liga. Para uma peça de determinada liga, cada fração pode ser como

$$X_1 = \frac{m_1}{M} \quad X_2 = \frac{m_2}{M} \tag{2}$$

onde

- m<sub>1</sub> é a massa do componente 1.
- m<sub>2</sub> é a massa do componente 2.
- M = m<sub>1</sub> + m<sub>2</sub> é a massa total.

A tabela a seguir mostra características de três ligas. Para instalações elétricas, a liga Tomback, com 90% de cobre e 10% de zinco, conhecida como Latão Tomback 90-10, é a mais interessante.

Nome da liga de latão	Liga (%Cu-%Zn)	Densidade a 20 °C, ou massa específica (g/cm <sup>3</sup> )	Resistividade Elétr. a 20°C (material recozido) (Ωcm)	Condutividade Elétr. a 20°C (material recozido) (%IACS) <sup>2</sup>
Tomback	90-10	8,80	3,92	44
Cartucho	70-30	8,53	6,16	28
Naval	60-40	8,41	6,63	26

Ref.: shockmetais.com.br, acesso em Set/2020. Obs.: O chamado Latão Comum tem liga 63-37.

3) Empuxo para estudo de ligas

O empuxo age sobre o objeto como um todo. Uma liga com dois componentes, 1 e 2, pode ter o volume escrito como

$$V_{obj} = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \tag{3}$$

e o empuxo

$$E = \rho_f \cdot g \cdot V_{obj} \Rightarrow E = \rho_f \cdot g \cdot \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) \tag{4}$$

<sup>1</sup> Conf. coppermetal.com.br (último acesso em Set/2020).

<sup>2</sup> As medições de condutividade são feitas em unidades %IACS que é a sigla para “International Annealed Copper Standard” ou “Padrão Internacional de Cobre Recozido”. A condutividade do cobre é de aproximadamente 100 %IACS a 20°C. (Ref.: zappitec.com, acesso Set/2020)

Hidroestática

por outro lado, a massa total da liga,  $M$ , pode ser escrita como

$$M = m_1 + m_2 \tag{5}$$

Usando as eq. (4) e (5) obtém-se as equações que fornecem as massas teóricas de cada um dos componentes da liga

$$m_1 = \frac{\rho_2 \cdot \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left( \frac{E}{\rho_f g} - \frac{M}{\rho_2} \right) \tag{6}$$

$$m_2 = \frac{\rho_2 \cdot \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left( \frac{M}{\rho_1} - \frac{E}{\rho_f g} \right) \tag{7}$$

Depreende-se das eq. (6) e (7) que, conhecendo-se as densidades (em geral tabeladas) e medindo-se a massa da liga e o empuxo, determina-se  $m_1$  e  $m_2$ . Por conseguinte, determina-se as frações  $X_1$  e  $X_2$  e conhece-se a liga.

A densidade da liga é ponderada pela composição. Com as definições da eq.(2) e com a eq. (3) pode-se escrever

$$\frac{1}{\rho} = \frac{X_1}{\rho_1} + \frac{X_2}{\rho_2} \tag{8}$$

4) O problema

A Indústria Fiuja Materiais Elétricos S.A. usa o latão Tomback 90-10 para fabricar terminais elétricos. Recentemente recebeu de um novo fornecedor um lote com 8 lingotes<sup>3</sup> desse material. Testes de resistência elétrica diferiram do esperado, indicando que provavelmente o latão recebido tem outra liga. Para saber qual liga recebida funcionários da empresa optaram por usar o princípio de Arquimedes. Mediram a massa e o empuxo em água de cada lingote, conforme tabela abaixo

Lingote	$M(\text{kg})$	$E(\text{N})$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Sabe-se a densidade para o cobre e para o zinco, tabeladas para 20°C são, respectivamente,

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \rho_{\text{Zn}} = 7,14 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

para a água  $\rho_f = 0,998 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  e a gravidade,  $g = (9,81 \pm 0,01) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Os próximos passos determinarão a liga de latão recebida. A informação ajudará a gerência na tomada de decisão: aceita ou rejeita com justificativa o lote de latão.

<sup>3</sup> Lingotes de latão ou cobre podem ter dimensões típicas 620×120×80 mm<sup>3</sup>. Vale como referência.



Hidrostatica

5) Determinação da liga

- a) Determinar a liga de latão do lote recebido.
- b) Fornecer ao responsável pela tomada de decisão, uma análise (devolutiva) da liga de latão encontrada no lote recebido.

A. Apêndice: Expressões matemáticas

a) Cobre

Para determinar a melhor estimativa da massa de cobre na liga, a partir da eq. (6), faz-se necessário conhecer as medidas

$$\begin{matrix} \rho_{Zn} \pm \Delta\rho_{Zn} & \rho_{Cu} \pm \Delta\rho_{Cu} & E \pm \Delta E \\ \rho_f \pm \Delta\rho_f & g \pm \Delta g & M \pm \Delta M \end{matrix}$$

e, para calculadora científica ou planilha uma estratégia é fazer cálculos intermediários — no Filofima o cálculo é direto através da eq. (6) —, ou seja,

$$m_{Cu} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} \left( \frac{E}{\rho_f \cdot g} - \frac{M}{\rho_{Zn}} \right) \quad (\text{Calculadora Medida Indireta})$$

ou, mão (calculadora científica),

$$m_{Cu} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} \left( \frac{E}{\rho_f \cdot g} - \frac{M}{\rho_{Zn}} \right) = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} (m_1 - m_2) = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{m_4} \cdot m_3 = m_5$$

onde cada medida intermediária é dada por

- medida 1

$$m_1 = \frac{E}{\rho_f \cdot g}, \quad \left( \frac{\Delta m_1}{m_1} \right)^2 = \left( \frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta \rho_f}{\rho_f} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta g}{g} \right)^2$$

- medida 2

$$m_2 = \frac{M}{\rho_{Zn}}, \quad \left( \frac{\Delta m_2}{m_2} \right)^2 = \left( \frac{\Delta M}{M} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta \rho_{Zn}}{\rho_{Zn}} \right)^2$$

- medida 3

$$m_3 = m_1 - m_2, \quad (\Delta m_3)^2 = (\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2$$

- medida 4

$$m_4 = \rho_{Zn} - \rho_{Cu}, \quad (\Delta m_4)^2 = (\Delta \rho_{Zn})^2 + (\Delta \rho_{Cu})^2$$

- medida 5 é a massa de cobre

$$m_{Cu} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{m_4} \cdot m_3, \quad \left( \frac{\Delta m_{Cu}}{m_{Cu}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta \rho_{Zn}}{\rho_{Zn}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \rho_{Cu}}{\rho_{Cu}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m_3}{m_3} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta m_4}{m_4} \right)^2$$

A fração de cobre na liga é dada por

$$X_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{M} \quad (\text{Calculadora Medida Indireta})$$

ou, à mão (calculadora científica),

$$X_{Cu} = \frac{m_{Cu}}{M}, \quad \left( \frac{\Delta X_{Cu}}{X_{Cu}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta m_{Cu}}{m_{Cu}} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta M}{M} \right)^2$$

O resultado será mais realista caso o arredondamento seja feito uma única vez no final do cálculo de  $m_{Cu}$  e no de  $X_{Cu}$ .



Hidrostatica

b) Zinco

Para o cálculo da melhor estimativa da massa de zinco na liga, tem a eq. (7), a qual é mostrada a seguir. Porém há caminho alternativo. Novamente, conhece-se as medidas

$$\begin{matrix} \rho_{Zn} \pm \Delta\rho_{Zn} & \rho_{Cu} \pm \Delta\rho_{Cu} & E \pm \Delta E \\ \rho_f \pm \Delta\rho_f & g \pm \Delta g & M \pm \Delta M \end{matrix}$$

e, para calculadora científica ou planilha uma estratégia é fazer cálculos intermediários — no Filofima o cálculo é direto através da eq. (7) —, ou seja,

$$m_{Zn} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} \left( \frac{M}{\rho_{Cu}} - \frac{E}{\rho_f \cdot g} \right) \quad (\text{Calculadora Medida Indireta})$$

ou, à mão (calculadora científica),

$$m_{Zn} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} \left( \frac{M}{\rho_{Cu}} - \frac{E}{\rho_f \cdot g} \right) = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{\rho_{Zn} - \rho_{Cu}} (m_1 - m_2) = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{m_4} \cdot m_3 = m_5$$

onde cada medida intermediária é dada por

- medida 1

$$m_1 = \frac{M}{\rho_{Cu}}, \quad \left( \frac{\Delta m_1}{m_1} \right)^2 = \left( \frac{\Delta M}{M} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta \rho_{Cu}}{\rho_{Cu}} \right)^2$$

- medida 2

$$m_2 = \frac{E}{\rho_f \cdot g}, \quad \left( \frac{\Delta m_2}{m_2} \right)^2 = \left( \frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta \rho_f}{\rho_f} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta g}{g} \right)^2$$

- medida 3

$$m_3 = m_1 - m_2, \quad (\Delta m_3)^2 = (\Delta m_1)^2 + (\Delta m_2)^2$$

- medida 4

$$m_4 = \rho_{Zn} - \rho_{Cu}, \quad (\Delta m_4)^2 = (\Delta \rho_{Zn})^2 + (\Delta \rho_{Cu})^2$$

- medida 5 é a massa de zinco

$$m_{Zn} = \frac{\rho_{Zn} \cdot \rho_{Cu}}{m_4} \cdot m_3, \quad \left( \frac{\Delta m_{Zn}}{m_{Zn}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta \rho_{Zn}}{\rho_{Zn}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \rho_{Cu}}{\rho_{Cu}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m_3}{m_3} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta m_4}{m_4} \right)^2$$

A fração de zinco na liga é dada por

$$X_{Zn} = \frac{m_{Zn}}{M}, \quad (\text{Calculadora Medida Indireta})$$

ou, à mão (calculadora científica),

$$X_{Zn} = \frac{m_{Zn}}{M}, \quad \left( \frac{\Delta X_{Zn}}{X_{Zn}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta m_{Zn}}{m_{Zn}} \right)^2 + \left( -1 \frac{\Delta M}{M} \right)^2$$

O resultado será mais realista caso o arredondamento seja feito uma única vez no final do cálculo de  $m_{Zn}$  e no de  $X_{Zn}$ .

c) Observação

É preferível arredondar usando os padrões da ABNT apenas no final. Para cálculos com muitas etapas, é possível arredondar as medidas a cada etapa do cálculo. Nesse caso, além usar as regras de arredondamento, o procedimento deve ser informado, pois o resultado final é alterado.



### Hidrostatica

É evidente que há outros caminhos para se determinar a melhor estimativa da massa, além dos cálculos mostrados nos itens (a) e (b) acima deste Apêndice. É comum diferentes sequências no cálculo levarem a diferentes incertezas.

Cabe notar que na calculadora do Filofima, a expressão é tratada como um todo, o que também pode afetar o resultado final da incerteza.

Diante desse cenário, a ABNT afirma ser preferível o procedimento que leva a uma menor propagação da incerteza (menor incerteza) e tal procedimento deve ser documentado (o que permite reprodução).

#### B. Anexo: Guia para resultados de cálculos

##### 1) Massa do lingote

- i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_ . ( ) estatística, ( ) instrumental
- iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_ .
- iv) desvio de precisão: \_\_\_\_\_ .

Obs.: Tratando os lingotes como “iguais” (mesmo processo de fabricação), evita determinar a liga oito vezes. A estatística facilita esse passo, porém há limite, ou seja, o desvio de precisão deve ser aceitável,  $DP \leq 10\%$ .

##### 2) Empuxo

- i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_ . ( ) estatística, ( ) instrumental
- iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_ .
- iv) desvio de precisão: \_\_\_\_\_ .

Obs.: Tratando os lingotes como “iguais” (mesmo processo de fabricação), e agora usando o mesmo fluido para determinar o empuxo, evita determinar a liga oito vezes. A estatística facilita esse passo, porém há limite, ou seja, o desvio de precisão deve ser aceitável,  $DP \leq 10\%$ .

##### 3) Componente cobre

###### a) Massa, $m_{Cu}$

- i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_ .

###### b) Fração, $X_{Cu}$

- i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_ .
- iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_ .
- iv) desvio de precisão: \_\_\_\_\_ .

Obs.: Aqui o desvio de precisão é indicativo de confiança no resultado. Para isso o desvio de precisão deve ser aceitável,  $DP \leq 10\%$ .



Hidrostática

4) Componente zinco

a) Massa,  $m_{Zn}$

i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_.

ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_.

iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_.

b) Fração,  $X_{Zn}$

i) estimativa (valor bruto): \_\_\_\_\_.

ii) incerteza (valor bruto): \_\_\_\_\_.

iii) melhor estimativa (norma ABNT): \_\_\_\_\_.

iv) desvio de precisão: \_\_\_\_\_.

Obs.: Aqui o desvio de precisão é indicativo de confiança no resultado. Para isso o desvio de precisão deve ser aceitável,  $DP \leq 10\%$ .

5) Identificar a liga  $X_{Cu}-X_{Zn}$ .

Obs.: Para ajudar na identificação da liga, escrever  $X_{Cu}$  e  $X_{Zn}$  com números inteiros.

i) Liga: \_\_\_\_\_

6) Conclusão

Devolutiva ao responsável pela tomada de decisão.

