

Hidrodinâmica

1) Introdução

a) Movimento Oblíquo

O movimento retilíneo uniformemente variado de um objeto no espaço tridimensional é descrito pela

- Equação horária da posição

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{a} \cdot \frac{t^2}{2} \quad (1)$$

- Equação horária da velocidade

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad (2)$$

onde

$\vec{r}(= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ , é o vetor posição

$\vec{v}(= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$ , é vetor velocidade

$\vec{a}(= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})$ , é o vetor aceleração

$t$  é o tempo.

Muitos movimentos podem ser descritos usando apenas duas dimensões (2D). Um importante exemplo é o movimento oblíquo (vide Fig. 1). Para este caso, os componentes do vetor aceleração são  $a_x = 0$  e  $a_y = -g$ , onde  $g$  é a gravidade. Os demais componentes das eq. (1) e (2) têm a forma

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin \theta_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad (3)$$

$$v_y(t) = v_0 \cdot \sin \theta_0 - g \cdot t \quad (4)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot \cos \theta_0 \cdot t \quad (5)$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos \theta_0 \quad (6)$$

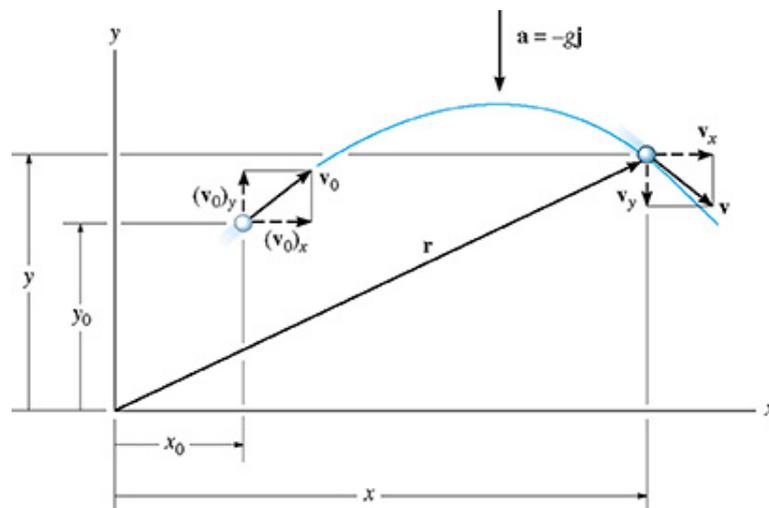


Fig. 1 - Movimento oblíquo (Ref. Halliday)

Hidrodinâmica

b) Hidrodinâmica

Para descrever as propriedades de um líquido incompressível, não viscoso e em regime laminar como na Fig. 2, tem-se a

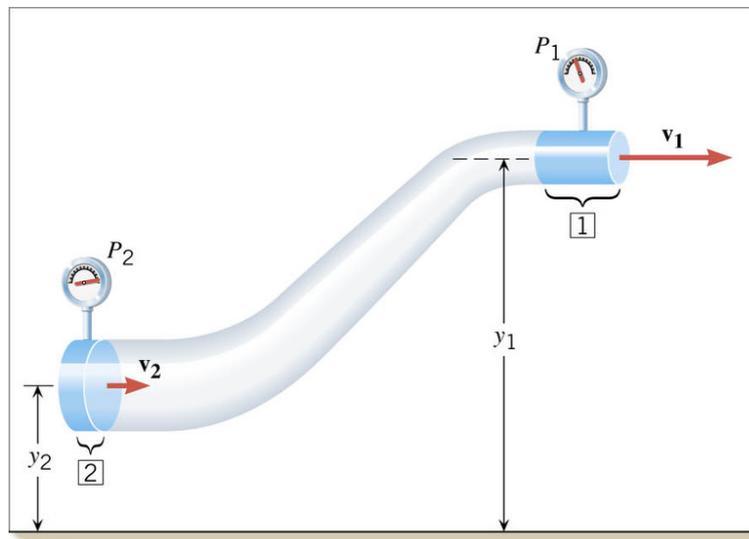


Fig. 2 – Dinâmica de fluidos (Ref. Cutnell-Johnson)

- Equação da continuidade

$$R_V = v \cdot A = \text{cte} \quad (7)$$

$R_V$  é a vazão volumétrica em metro cúbico por segundo,  $\text{m}^3/\text{s}$ ,  
 $v$  é o módulo da velocidade média em metro por segundo,  $\text{m}/\text{s}$   
 $A$  é a área da seção reta em metro quadrado,  $\text{m}^2$ .

- Equação de Bernoulli

$$P + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho \cdot g \cdot y = \text{cte} \quad (8)$$

$P$  é a pressão em pascal, Pa

$\rho$  é a densidade em quilograma por metro cúbico,  $\text{kg}/\text{m}^3$

$v$  é a velocidade em metro por segundo,  $\text{m}/\text{s}$

$y$  é a altura em metro, m

$g$  é a gravidade local em metro por segundo quadrado,  $\text{m}/\text{s}^2$

c) Bomba de água

Para elevar água até uma altura  $h$ , uma bomba deve ter potência (elétrica) dada por

$$P_{ot} = R_m \cdot g \cdot h \quad (9)$$

onde

$R_m (= \rho \cdot R_V)$  é a vazão mássica em  $\text{kg}/\text{s}$

$R_V (= A \cdot v)$  é a vazão volumétrica em  $\text{m}^3/\text{s}$

$\rho$  é a densidade em  $\text{kg}/\text{m}^3$

$g$  é a gravidade em  $\text{m}/\text{s}^2$

$A$  é a área da seção reta do encanamento

$v$  é a velocidade de escoamento do fluido em regime laminar

Hidrodinâmica

d) Movimentos combinados

É possível combinar a cinemática com a hidrodinâmica para resolver problemas. É necessário achar parâmetros comuns para as duas abordagens. Um parâmetro é a gravidade, o outro é a velocidade, ou seja, a velocidade final de uma etapa (saída da água pelo dreno) é a velocidade inicial de outra (queda livre). Esquematizado

Saída da caixa d'água (dreno):  $\vec{v}_d = v_d \hat{i} + 0 \hat{j}$

Queda de água (queda livre):  $\vec{v}_q = (v_0 \cdot \cos \theta_0) \hat{i} + 0 \hat{j}$

Ou

$$v_d = v_0, \text{ pois } \theta_0 = 0 \tag{10}$$

2) Problema

A caixa d'água de uma fazenda é um cilindro montado sobre uma estrutura de ferro conforme Fig. 2. Tem diâmetro  $\phi_{cda}$  e altura  $A$ . Na parte superior há um cano com diâmetro  $\phi_c$  para entrada de água proveniente de uma bomba elétrica com potência  $P_{ot}$  localizada no solo. Na parte inferior da caixa há um orifício para dreno com diâmetro  $\phi_d$ , que está à altura  $H$  acima do solo. Quando o dreno está aberto, a água chega ao solo à distância  $R$  da caixa d'água.

Faz-se necessário conhecer o atual volume de água,  $V_0$ , e o tempo necessário para encher o reservatório.

Para determinar o volume deve-se determinar o nível da água,  $h$ , porém é difícil o acesso ao interior da caixa d'água. Como solução para determinar  $h$ , um funcionário abre a saída da água apenas o tempo suficiente para outro funcionário medir o alcance da água que cai ao chão,  $R$ . A medida é rápida o suficiente de modo a não alterar significativamente o nível da água.

O tempo para encher a caixa,  $t_{tot}$ , está relacionado ao volume disponível na caixa, à vazão que bomba elétrica e diâmetro e altura do encanamento conseguem imprimir.

Determinar e analisar

- a) A melhor estimativa do atual volume de água dentro da caixa d'água,  $V_0$  (em metros cúbicos).
- b) A melhor estimativa do tempo necessário para encher a caixa d'água,  $t_{tot}$  (em minutos).

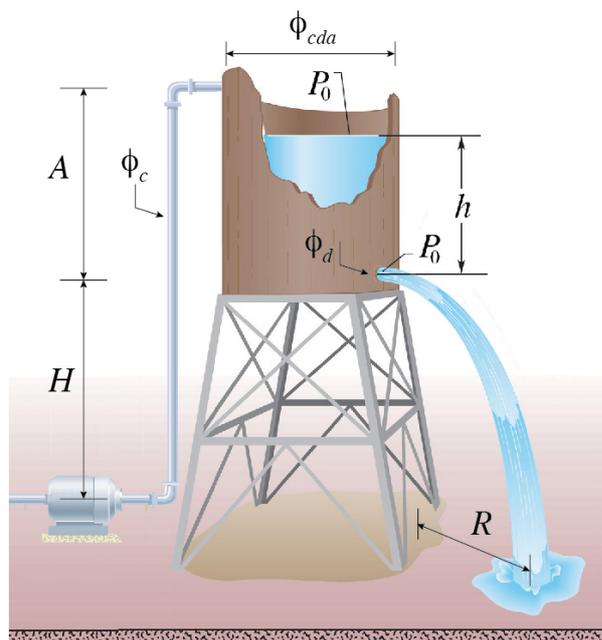


Fig. 2 – Bernoulli e movimento oblíquo (adaptado pelo prof.)

Hidrodinâmica

Tabela de dados

Medida	Observação
$\phi_{cda}$	Diâmetro da caixa d'água
$A$	Altura da caixa d'água
$\phi_d$	Diâmetro do furo do dreno
$H$	Altura do furo do dreno em relação ao solo
$R$	Alcance horizontal da água
$P_{ot}$	Potência da bomba elétrica
$\phi_c$	Diâmetro do cano da bomba à caixa d'água

Medidas de referência:

Densidade do ar:  $\rho = 1,21 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Densidade da água:  $\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Gravidade:  $g = (9,81 \pm 0,01) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Pressão atmosférica:  $P_0 = 101.325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$

Comprimento:  $1'' = 2,54 \text{ cm}$

Obs.: Medidas com incerteza não declarada são tratadas como exatas. Valor de conversão de unidade de medida não altera a quantidade de algarismos significativos da medida.