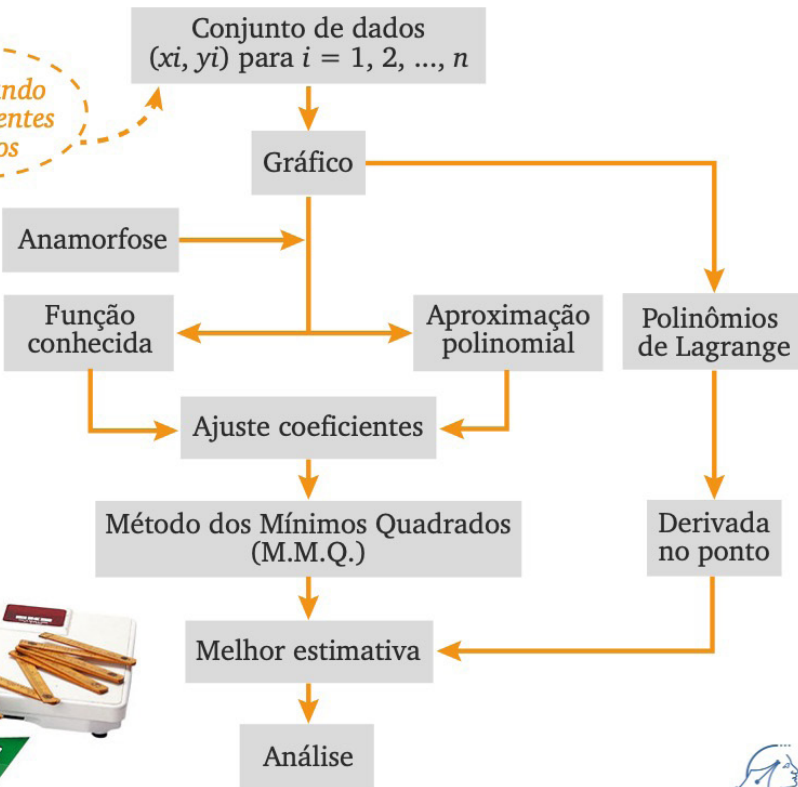




# Análise de dados experimentais

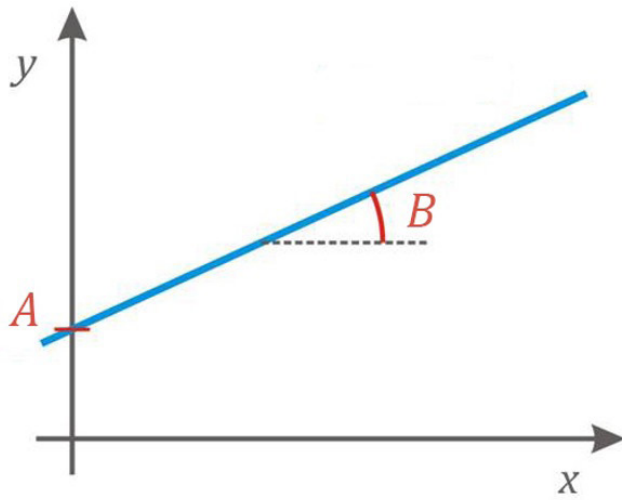
*mensurando em diferentes estados*

Ref.: mimundocienciasblog.blogspot.com



# Curva de Calibração

## Inclinação e Intercepto



Equação da Reta

$$y = Bx + A$$

inclinação

intercepto



Ref.: 220808

3 de 25



# Exemplos Lineares

$$y = A + B \cdot x$$

$$\text{M.R.U.} \quad x = x_0 + v \cdot t$$

$$\text{M.R.U.V.} \quad v = v_0 + a \cdot t$$

$$\text{2ª Lei de Newton} \quad F_{res} = m \cdot a$$

$$\text{Dilatação Linear} \quad L = L_0 + L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\text{Lei de Ohm} \quad \Delta U = R \cdot I$$



Ref.: 220808

4 de 25



# Exemplos Não Lineares

	<i>Equação</i>
M.R.U.V	$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$
M.R.U.V.	$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$
Eletrodinâmica	$I = I_0 e^{-\alpha t}$
Onda em Corda	$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\tau/\mu}$
Termodinâmica	$P = \frac{nRT}{V}$



Ref.: 220808

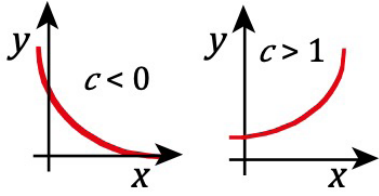
5 de 25



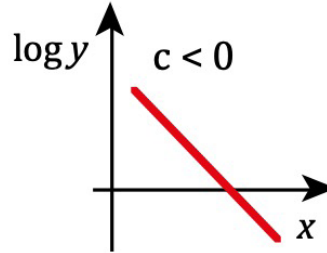
# Anamorfose

Caso:  $y = a \cdot b^{c \cdot x}$

- Gráficos típicos



- Com anamorfose

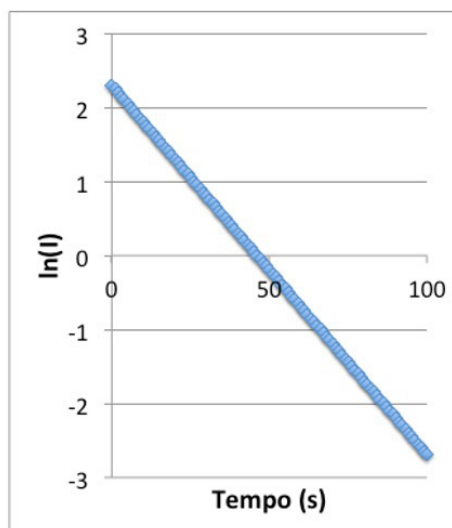
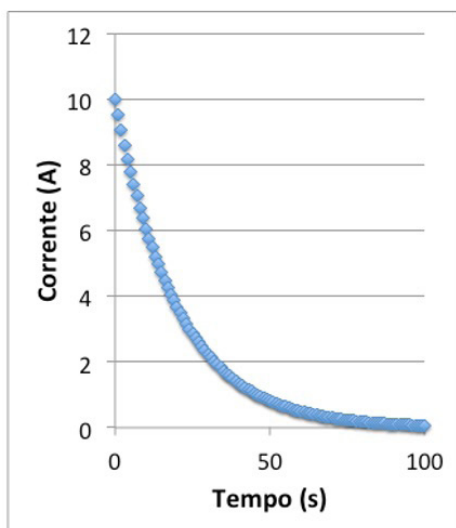


$$\begin{array}{ccccccc} \log & = & \log & + & c \cdot \log b & \cdot & x \\ y & & a & & & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ Y & = & A & + & B & \cdot & X \end{array}$$



# Exemplo 1

- Gráficos da corrente elétrica em um capacitor descarregando
- Equação:  $I(t) = 10e^{-0,05t}$



Ref.: 220808

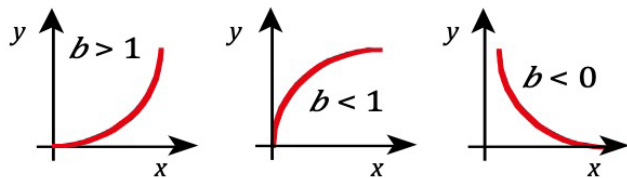
7 de 25



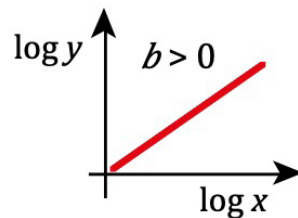
# Anamorfose

Caso:  $y = a \cdot x^b$

- Gráficos típicos



- Com anamorfose



$$\begin{array}{ccccccc} \log & = & \log & + & b & \cdot & \log \\ y & & a & & & & x \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ Y & = & A & + & B & \cdot & X \end{array}$$



Ref.: 220808

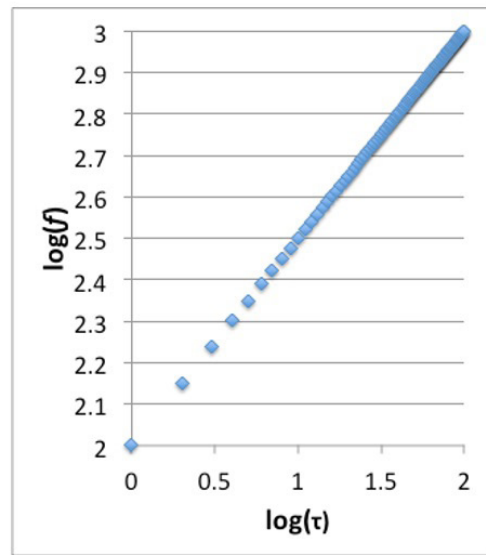
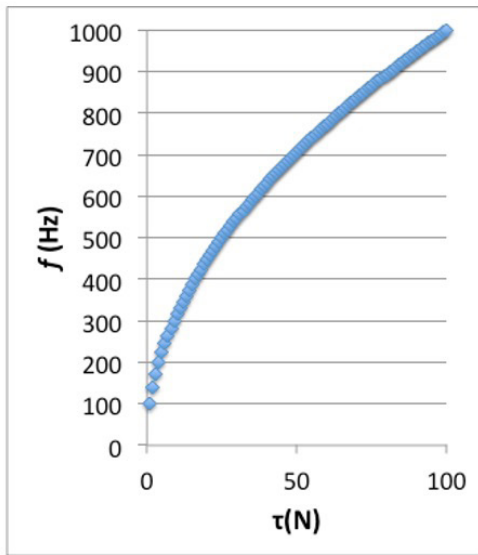
8 de 25





# Exemplo 2

- A frequência sonora em uma corda vibrante depende da tração
- Equação:  $f(\tau) = 100 \cdot \tau^{1/2}$



Ref.: 220808

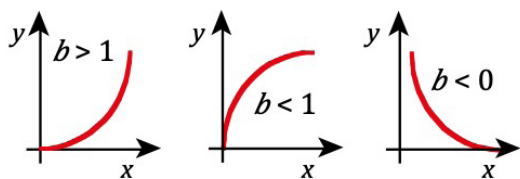
9 de 25



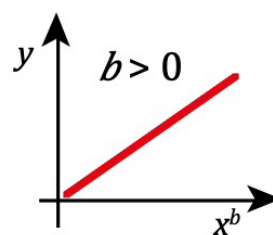
# Anamorfose

Caso:  $y = a \cdot x^b$  (com  $b$  conhecido)

- Gráficos típicos



- Com anamorfose,  $A = 0$

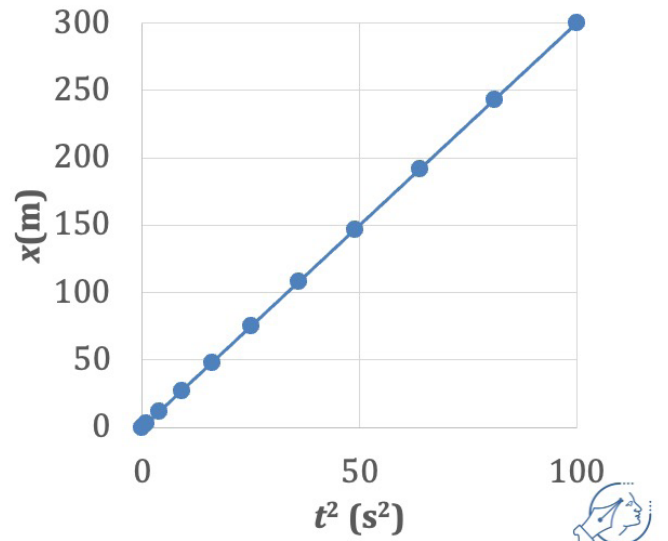
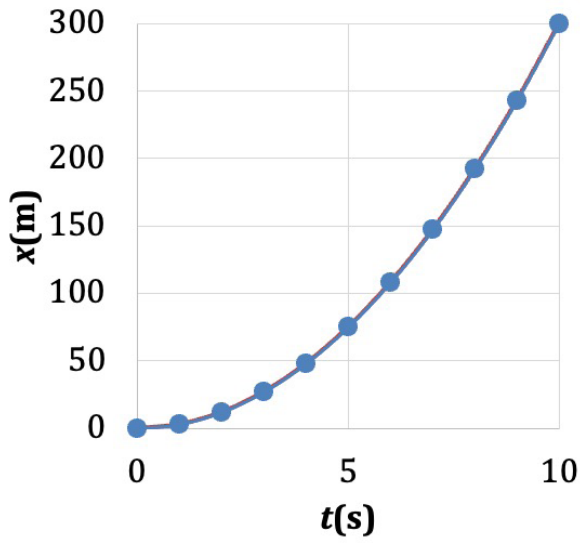


$$\begin{array}{rcc} y & = & a \cdot x^b \\ \Downarrow & & \Downarrow \quad \Downarrow \\ Y & = & B \cdot X \end{array}$$



# Exemplo

- Movimento retilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.)
- Equação:  $x(t) = 3 \cdot t^2$



Ref.: 220808

11 de 25





# Método dos Mínimos Quadrados

- Dado  $n$  pares de medidas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  e a relação linear

$$y_i \cong B \cdot x_i + A$$

- Busca-se os coeficientes  $A$  e  $B$  tal que

$$\sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2 = \text{mínimo}$$

e fazendo,

$$\frac{d}{dA} \sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2 = 0 \quad \blacksquare \quad \frac{d}{dB} \sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2 = 0$$

leva a



# M.M.Q. (parte 1)

## Série de Medidas de um Mensurando em Diferentes Estados

- Dado  $n$  pares de medidas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  e a relação linear

$$y_i \cong B \cdot x_i + A$$

tem-se

Estimativa	Incerteza quadrática
$B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{D}$	$(\Delta B)^2 \approx \frac{E}{D(n-2)}$
$A = \bar{y} - B\bar{x}$	$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{D}{n} + \bar{x}^2\right) (\Delta B)^2$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \blacksquare \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \blacksquare \quad D = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \blacksquare \quad E = \sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2$$



# M.M.Q. (parte 2)

## Série de Medidas de um Mensurando em Diferentes Estados

- Caso  $A = 0$

$$y_i \cong B \cdot x_i$$

Estimativa	Incerteza quadrática
$B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{n-1} \frac{E}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

onde  $E = \sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2$



# Melhor estimativa

- A partir da equação linear  $\bar{y} = A + B\bar{x}$  para a ordenada

Estimativa	Incerteza quadrática
$y = A + B \cdot x$	$(\Delta y)^2 = (x - \bar{x})^2 (\Delta B)^2 + \left(\frac{E}{n-2}\right)^2$

- E para a abscissa

Estimativa	Incerteza quadrática
$x = \frac{y - A}{B}$	$(\Delta x)^2 = \frac{1}{B^2} \left(\frac{E}{n-2}\right)^2$

onde  $E = \sum_{i=1}^n (y_i - B \cdot x_i - A)^2$





# Expressando a Melhor Estimativa!

- A melhor estimativa de uma grandeza  $q$  tem a forma

$$q = (q_{est} \pm \Delta q_{est}) \text{ u.m.}$$

1º) unidade de medida:  
estimativa e incerteza  
estão na mesma escala

3º) a estimativa  
tem mesma  
precisão que  
a incerteza

2º) incerteza é escrita  
com 1 a. s.  
(no máximo 2 a.s.)



# Algoritmo (planilha)

$i$	$x_i$	$y_i$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - Bx_i - A)^2$
1	$x_1$	$y_1$	$(x_1 - \bar{x})y_1$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(y_1 - Bx_1 - A)^2$
2	$x_2$	$y_2$	$(x_2 - \bar{x})y_2$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(y_2 - Bx_2 - A)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$x_n$	$y_n$	$(x_n - \bar{x})y_n$	$(x_n - \bar{x})^2$	$(y_n - Bx_n - A)^2$
	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$
	$\div n$	$\div n$	$S \uparrow$	$D \uparrow$	$E \uparrow$
	$\bar{x} \uparrow$	$\bar{y} \uparrow$			

## Inclinação

$$B = \frac{S}{D} \quad \blacksquare \quad \Delta B = \sqrt{\frac{E}{D(n-2)}}$$

## Intercepto

$$A = \bar{y} - B\bar{x} \quad \blacksquare \quad \Delta A = \Delta B \sqrt{\frac{D}{n} + \bar{x}^2}$$



# Exercício

i	xi	yi	xi - xm	(xi - xm)*yi	(xi - xm)^2	(yi - B*xi - A)^2
1	1	5	-4,5	-22,5	20,25	0,793719008
2	2	6	-3,5	-21	12,25	0,022956841
3	3	8	-2,5	-20	6,25	0,037612489
4	4	9	-1,5	-13,5	2,25	1,528595041
5	5	11	-0,5	-5,5	0,25	1,635298439
6	6	15	0,5	7,5	0,25	0,460752984
7	7	17	1,5	25,5	2,25	0,404958678
8	8	21	2,5	52,5	6,25	6,728521579
9	9	19	3,5	66,5	12,25	2,098108356
10	10	22	4,5	99	20,25	0,240991736

xm	ym
5,5	13,3

S	D	E
168,5	82,5	13,95151515

Inclinação		Intercepto	
B	$\Delta B$	A	$\Delta A$
2,0424	0,1454	2,066667	0,902129915



Ref.: 220808

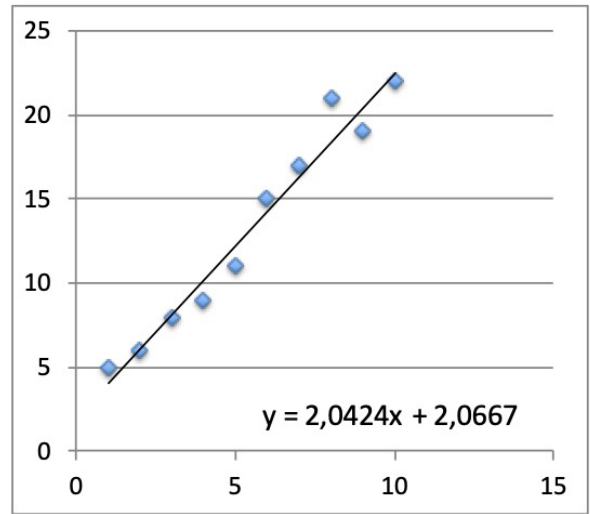
19 de 25



# Resultados

- Inclinação  
 $B = (2,04 \pm 0,15)$
- Intercepto  
 $A = (2,07 \pm 0,90)$

$x_i$	$y_i$
1	5
2	6
3	8
4	9
5	11
6	15
7	17
8	21
9	19
10	22



# Análise da Regressão

- Coeficiente de correlação linear de Pearson ( $r$ )  
grau de relacionamento entre as duas variáveis.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

- Coeficiente de determinação ( $R^2$ )

é uma **medida** descritiva da proporção da **variação de  $y$  que pode ser explicada por variações em  $x$** , segundo o modelo de regressão especificado

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

onde  $\hat{y}_i = A + B \cdot \bar{y}_i$

- Propriedade:  $r^2 = R^2$



# Algoritmo (planilha)

$i$	$x_i$	$y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(A + Bx_i - \bar{y})^2$
1	$x_1$	$y_1$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$(y_1 - \bar{y})^2$	$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y})$	$(A + Bx_1 - \bar{y})^2$
2	$x_2$	$y_2$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(y_2 - \bar{y})^2$	$(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y})$	$(A + Bx_2 - \bar{y})^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$x_n$	$y_n$	$(x_n - \bar{x})^2$	$(y_n - \bar{y})^2$	$(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})$	$(A + Bx_n - \bar{y})^2$
	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	$\Sigma$

$\div n$     $\div n$

$\bar{x}$     $\bar{y}$

$S_1 \uparrow$

$S_2 \uparrow$

$S_3 \uparrow$

$S_4 \uparrow$

Coeficiente de correlação

$$r = \frac{S_3}{\sqrt{S_1 S_2}}$$

Coeficiente de determinação

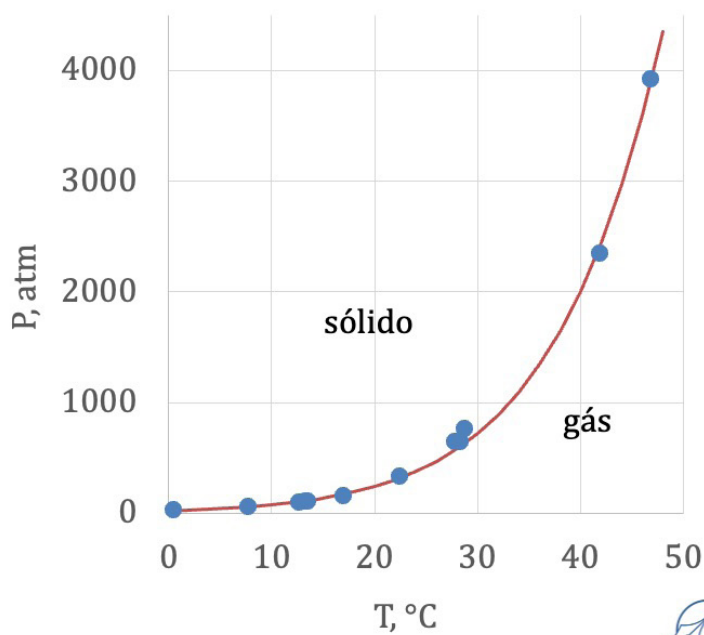
$$R^2 = \frac{S_4}{S_2}$$



# Dados (T, P): Metano

física/laboratório

Diagrama de Fase	
T, K	P, atm
273,7	27
280,9	58
285,9	97
286,5	105
286,7	107
290,2	157
295,7	335
301,0	640
301,6	645
302,0	765
315,1	2344
320,1	3918



Ref.: 220808

23 de 25

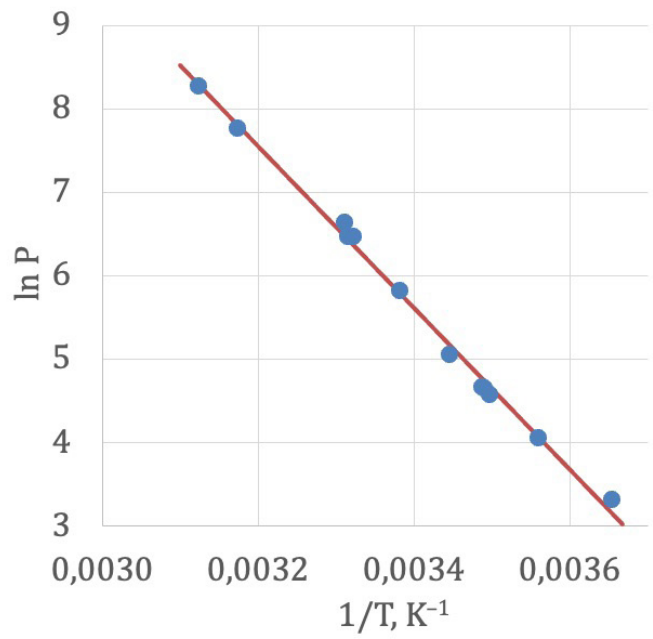
filofima.com.br



# Dados (T, P): Metano → Anamorfose

física/laboratório

Diagrama de Fase	
1/T	ln P
0,00365	3,308
0,00356	4,055
0,00350	4,570
0,00349	4,653
0,00349	4,669
0,00345	5,056
0,00338	5,815
0,00332	6,461
0,00332	6,470
0,00331	6,640
0,00317	7,760
0,00312	8,273



Ref.: 220808

24 de 25

filofima.com.br





# Referências

- G. L. SQUIRES. *Practical Physics*. 4th ed. United Kingdom: Cambrigde, 2001.
- *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*. 3ª ed. revisada. Rio de Janeiro: ABNT, INMETRO, 2003.
- *Quadro Geral de Unidades de Medida*. 4ª ed. São Paulo: SENAI, 2007.
- *Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos Fundamentais e Gerais e Termos Associados*. INMETRO, 2009.

